Fiche 8
Les suites

Dans cette fiche, on va traiter d'un élément incontournable des mathématiques et de la vie courante : les suites.

1 Généralités sur les suites

Une suite [de nombres réels] qu'on appellera en général "u" est une succession d'une infinité de nombre (appelé les termes), qu'on énumère par les entiers naturels.

Des exemples classiques en mathématique sont les suivants :

1. La suite des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$) : $0; 1; 2; 3; ...$.
2. Une suite permettant de décrire les entiers relatif (noté $\mathbb{Z}$) : $0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; ...$
3. La suite des entiers naturels pairs : $0; 2; 4; 6; 8; ...$.
4. La suite des carrés d'entiers naturels : $0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; ...$.
5. La suite des puissances de 2 : $1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; ...$.

En général on énumère les termes d'une suite u en notant u_n, le $n^{ième}$ termes de la suite où $n \in \mathbb{N}$.
Attention, on ne commence pas toujours à 0.
On peut alors noter la suite u aussi (u_n).

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 4$;...
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = -1$; $u_3 = 2$; $u_4 = -2$;...
3. $u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 6$; $u_4 = 8$;...
4. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16$;...
5. $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 8$; $u_4 = 16$;...

Exercice 1
Une nouvelle librairie ouvre et propose 50 000 ouvrages au 1er janvier 2010.
Chaque début d'année, la libraire constate qu'elle a vendu 50% des ouvrages qu'elle avait en stock au 1er janvier de l'année précédente et qu'elle a acheté 5000 ouvrages durant l'année.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n), le terme u_n donnant le nombre d'ouvrages disponibles au 1er janvier de l'année $2010 + n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Quel est le nombre d'ouvrage que la libraire pourra proposer au 1er janvier 2016 ?

2 Deux manières de définir une suite

Une suite peut-être définie de deux manières différentes.
— Une manière dite explicite (ou fonctionnelle).
— Une manière dite récursive (ou itérative).

2.1 Suite définie de manière explicite

Une suite (u_n) est donnée de manière explicite lorsque les termes u_n dépendent uniquement de n. C'est à dire que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction bien définie sur $\mathbb{N}$.

1. La suite des entiers naturels peut être définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La suite des entier relatif peut être définie [de façon un peu compliquée] par

   $$u_n = (-1)^{n+1}\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici $\mathrm{E}(x)$ est la partie entière de x.
3. La suite des entier naturels pairs peut être définie par $u_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite des carrés parfaits peut être définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. La suite des puissances de 2 peut être définie par $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 + 5n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

Dans l'exercice 1, on remarque que le nombre d'ouvrage disponible est calculé par rapport aux nombres d'ouvrages de l'année précédente.
Par conséquent, on peut définir la suite d'une autre manière.

2.2 Suite définie de manière récursive

Une suite (u_n) est donnée de manière récursive lorsqu'on a :

1. Un terme initial (Initialisation).
2. Une manière de passer d'un terme au suivant (Hérédité)

C'est à dire qu'il nous faut

1. Le premier terme u_0 (ou u_1 si on commence à $n = 1$, u_2 si on commence à $n = 2$).
2. Une fonction f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est une fonction telle que $f(u_n)$ est bien définie pour tout n.

Lorsqu'on définit une suite de manière récursive, on écrit $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \text{ un nombre quelconque} \end{array}\right.$.

1. La suite des entiers naturels : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{array}\right.$.
2. La suite des entiers relatifs est assez délicate à définir récursivement ...
3. La suite des entiers naturels pairs : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{array}\right.$.
4. La suite des carrés d'entier naturel n'est pas évidente à définir récursivement mais c'est possible : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = (\sqrt{u_n} + 1)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{array}\right.$.
5. La suite des puissances de 2 : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{array}\right.$.

Les suites définies de manière récursive souffre d'un terrible défaut.
Pour obtenir un terme de la suite, il faut calculer tous les termes précédents. Par exemple, pour calculer u_{100}, il faut u_{99} or pour calculer u_{99}, il faut u_{98},...

Il existe des suites dont on ne connait aucune des deux manières pour les définir. En effet, la suite des nombres premiers est une suite dont on ne connaît ni l'expression explicite, ni l'expression récursive depuis plus de 2500 ans.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n^2 + 5u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 5 On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 6
La bibliothèque municipal devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Chaque année la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6000 ouvrages neufs.

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'ouvrages disponible le 1er janvier de chaque année à partir de 2013. La situation peut être modélisée par une suite donnant une estimation d'ouvrage disponible l'année $2013 + n$.

1. Donner u_0.
2. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
3. Donner une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Que pouvez-vous dire sans le démontrer (conjecturer) sur le comportement de la suite (u_n) : les termes u_n augmentent-ils avec n ou bien diminuent-ils, ou bien ni l'un, ni l'autre ?

3 Les suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite arithmétique si pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours le même nombre. Ce nombre est appelé la raison de la suite.
Cela correspond à l'expression récursive : $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$ qui est indépendant de n.
Donc pour définir une suite arithmétique il nous faut deux choses :

1. Un premier terme de la suite u_0.
2. Une raison $r \in \mathbb{R}$ qui est indépendant de n.

Voici quelques exemples :

1. La suite des entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ est une suite arithmétique de premiers terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$.
2. La suite des entiers naturels relatifs $0, 1, -1, 2, -2, ...$ n'est pas une suite arithmétique car $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = -2$.
3. La suite des entiers naturels pairs $0, 2, 4, 6, ...$ est une suite arithmétique de premiers terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 2$.
4. La suite des carrés parfaits $0, 1, 4, 9, 16, ...$ n'est pas une suite arithmétique puisqu'on ajoute 1 de u_0 à u_1 puis 3 de u_1 à u_2.

5. La suite des puissances de deux $1, 2, 4, 8, 16, ...$ n'est pas une suite arithmétique puisqu'on ajoute 1 de u_0 à u_1 puis 2 de u_1 à u_2.

Proposition.

1. L'expression récursive d'une suite (u_n) arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est donnée par : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \text{le nombre donnée} \end{cases}$
2. L'expression explicite de cette suite est $u_n = u_0 + nr$.
3. On peut facilement démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n. Dans ce cas $u_{n+1} - u_n$ est exactement la raison r.

Exercice 7 On considère (u_n) une suite arithmétiques de raison r.

1. Sachant que $u_0 = 2$ et $r = -3$, donner une expression explicite de u_n et calculer u_{10} et u_{20}.
2. Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$, calculer u_2 et u_{100}.
3. Sachant que $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$, calculer u_0 et u_{50}.

4 Les suites géométriques

Une suite (u_n) est dite géométriques si pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par le même nombre. Ce nombre est appelé la raison de la suite.
Cela correspond à l'expression récursive : $u_{n+1} = u_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$ qui est indépendant de n.
Donc pour définir une suite géométriques il nous faut deux choses :

1. Un premier terme de la suite u_0.
2. Une raison $q \in \mathbb{R}$ qui est indépendant de n.

Voici quelques exemples :

1. La suite des entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ n'est pas une suite géométriques puisqu'on multiplie par 2 de u_1 à u_2 puis $\frac{3}{2}$ de u_2 à u_3.
2. La suite des entiers relatifs $0, 1, -1, 2, -2, ...$ n'est pas une suite géométriques puisqu'on multiplie par -1 de u_1 à u_2 puis -2 de u_2 à u_3.
3. La suite des entiers naturels pairs $0, 2, 4, 6, ...$ n'est pas une suite géométriques puisqu'on multiplie par 2 de u_1 à u_2 puis $\frac{2}{3}$ de u_2 à u_3.
4. La suite des carrés entiers naturels $0, 1, 4, 9, 16, ...$ n'est pas une suite géométriques puisqu'on multiplie par 4 de u_1 à u_2 puis $\frac{9}{4}$ de u_2 à u_3.
5. La suite des puissances de deux $1, 2, 4, 8, 16, ...$ est une suite géométriques de premier terme $u_0 = 1$ et raison $q = 2$.

Remarque. Pour les suite commençant par 0 on aurait juste pu remarque que $u_1 \neq 0$ ...

Proposition.

1. L'expression récursive d'une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0 est donnée par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \times q \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \text{le nombre donnée} \end{cases}$$
2. L'expression explicite de cette suite est $u_n = u_0 \times q^n$, $n \geq 0$.
3. Si $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut facilement montrer que la suite (u_n) est géométrique si et seulement si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est indépendant de $n \geq 0$. Dans ce cas le rapport est la raison q de la suite (u_n).

Exercice 8 On considère (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.

1. Sachant que $u_0 = 32$ et $q = \frac{1}{4}$, donner une expression explicite de u_n et calculer u_{10} et u_{20}.
2. Sachant que $u_4 = 5$ et $u_5 = 25$, calculer u_2 et u_{100}.
3. Sachant que $u_3 = 3$ et $u_5 = 12$, calculer u_0 et u_{10}.