DS 2

Ex 1 :

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y=10 \\ x=y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}=\{(1;2)\}$$

$$\begin{cases} 8x+4y=8 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=\frac{2-y}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}=\{(-1;4)\}$$

Ex 2 :

1) $5x-3 \leqslant -7x+4$

$\Leftrightarrow 12x \leqslant 7$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{7}{12}$

$\mathcal{S}=]-\infty;\frac{7}{12}]$

2) $2x+5 > -x+3(x+1)$

$\Leftrightarrow 5 > 3$

$\mathcal{S}=\mathbb{R}$

3) $5x-2(x+1) > 3x+1$

$\Leftrightarrow -2 > 1$

$\mathcal{S}=\emptyset$

4) $(x+1)(-2x+3) > 0$

$x+1 \geqslant 0 \quad -2x+3 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow x \leqslant 3/2$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)\times(-2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S}=]-1;3/2[$.

5) $(2x+1)(x-1) < (x-1)(7x+4)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[2x+1-(7x+4)\right] < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-5x-3) < 0$

$x-1 \geq 0 \qquad -5x-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1 \qquad \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$-3/5$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-5x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)(-5x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty ; -3/5\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$.

6) $(2x+1)^2 \geq 8x+4$

$\Leftrightarrow (2x+1)\left[2x+1-4\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(2x-3) \geq 0$

$2x+1 \geq 0 \qquad 2x-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)\times(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

7) $(-3x+1)^2 < (x+2)^2$

$\Leftrightarrow (-3x+1)^2 - (x+2)^2 < 0$

$\Leftrightarrow (-3x+1-x-2)(-3x+1+x+2) < 0$

$\Leftrightarrow (-4x-1)(-2x+3) < 0$

$-4x-1 \geq 0 \qquad -2x+3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

x		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$	
$-4x-1$	$+$	0	$-$		$-$
$-2x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$(-4x-1)(-2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left]-\frac{1}{4} ; \frac{3}{2}\right[$.

Ex3: 1) $A(x) = (3x-5)(5-2x) - (3x-5)^2$

a) $A(x) = (3x-5)(5-2x) - (3x-5)^2$

$= 15x - 6x^2 - 25 + 10x - (9x^2 - 30x + 25)$

$= -15x^2 + 55x - 50$

b) $A(x) = (3x-5)(5-2x) - (3x-5)^2$

$= (3x-5)[5-2x-(3x-5)]$

$= (3x-5)(-5x+10)$

c) $A(x) \leq 0$

$\iff (3x-5)(-5x+10) \leq 0$

$3x-5 \geq 0$ $\quad$ $-5x+10 \geq 0$

$\iff x \geq 5/3$ $\quad$ $\iff x \leq 2$

x	$-\infty$		$5/3$		2		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-5x+10$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; 5/3] \cup [2; +\infty[$.

2) a) $B(x) = x^2(x+1)^2 - (x+1)^2(3x^2-4)$

$= (x+1)^2(x^2 - 3x^2 + 4)$

$= 2(x+1)^2(2-x^2)$

$= 2(x+1)^2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$

b) $B(x) = 0 \iff 2(x+1)^2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) = 0$

$\iff (x+1)^2 = 0$ ou $\sqrt{2}-x = 0$ ou $\sqrt{2}+x = 0$

$\iff x+1 = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$\iff x = -1$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$, $S = \{-1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

Ex4: 1) $3x^2-5x-2=0$

$\Delta = 25+24=49>0$

donc on a deux solutions distinctes:

$x_- = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$; $x_+ = \frac{5+7}{6} = 2$

$\mathcal{S} = \{-1/3 ; 2\}$

2) $x^2-2x+3=0$ (4)

$\Delta = 4-12=-8<0$

donc il n'y a pas de solution :

$\mathcal{S} = \emptyset$

3) $x+4x^2-5=0$

$\Leftrightarrow 4x^2+x-5=0$

$\Delta = 1+80=81>0$

donc on a deux solutions distinctes:

$x_- = \frac{-1-9}{8} = -\frac{5}{4}$; $x_+ = \frac{-1+9}{8} = 1$

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{4} ; 1\right\}$

4) $(2x+1)(x-1) = x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-2=0$

$\Delta = 4+16=20>0$

donc on a deux solutions:

$x_- = \frac{2-\sqrt{20}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5) $5x^2-3=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5}x-\sqrt{3})(\sqrt{5}x+\sqrt{3})=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}x-\sqrt{3}=0$ ou $\sqrt{5}x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\frac{3}{5}} ; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$.

Ex5: Puisque $x \geq 0$ on a

$$5x+10 \geq 3x+6 \text{ et } 5x+10 \geq 4x+8$$

en effet: $5x+10 \geq 3x+6$ $\quad$ $5x+10 \geq 4x+8$

$\Leftrightarrow 2x \geq -4$ $\quad$ $\Leftrightarrow x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \geq -2$

Ainsi, dans le triangle ABC, le plus long coté est [BC].

D'une part $BC^2 = (5x+10)^2 = 25x^2 + 100x + 10$

D'autre part $AB^2 + AC^2 = (3x+6)^2 + (4x+8)^2$

$= 9x^2 + 36x + 36 + 16x^2 + 64x + 64$

$= 25x^2 + 100x + 100$

Ainsi pour tout $x \geq 0$ on a: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc, en vertu de la reciproque du théorème de Pythagore on obtient que le triangle ABC est rectangle en A.

Ex6: Soit x le nombre de bille d'olivier au debut de la partie et y le nombre de bille de Didier au debut de la partie.

De la phrase : "au depart Olivier a le double de billes de Didier" on obtient l'equation:

$x = 2y$

De la phrase : " Didier prend 5 billes à Olivier,
il a alors le triple de billes d'Olivier "
on obtient l'equation : $3(x-5) = y+5$

On a ainsi le systeme :

$$\begin{cases} x = 2y \\ 3(x-5) = y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 6y-15 = y+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ainsi Olivier avait 8 billes et Didier 4 billes.
au debut de la partie.