DS 4

Ex 1 : 1) (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} & \text{pour } n \geq 0 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

$u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \boxed{\sqrt{5}}$ | $u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+5} = \boxed{\sqrt{6}}$ | $u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+6} = \boxed{\sqrt{7}}$

2) (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 5, & n \geq 0 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 donc pour $n \geq 0$ on a : $u_n = u_0 + 5n$
$= \boxed{3 + 5n}$

b) $u_{1000} = 3 + 5 \times 1000 = \boxed{5003}$.

3) (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 10 u_n, & n \geq 0 \\ u_0 = -4 \end{cases}$

a) (u_n) est une suite géométrique de raison 10 donc pour $n \geq 0$ on a :
$u_n = 10^n \times u_0 = \boxed{-4 \times 10^n}$

b) $u_9 = -4 \times 10^9 = \boxed{-4\,000\,000\,000}$

Ex 2 1) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = \underline{15x^2 - 4x + 5}$

2) $f(x) = (2x+3)^3$

$= [u(x)]^3$ avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = 2x+3 \\ u'(x) = 2 \end{array} \right.$

donc $f'(x) = 3[u(x)]^2 \times u'(x)$

$= 3 \times (2x+3)^2 \times 2$

$= \underline{6 \times (2x+3)^2}$

3) $f(x) = \sqrt{7x-3}$

$= \sqrt{u(x)}$ avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = 7x-3 \\ u'(x) = 7 \end{array} \right.$

donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \underline{\dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}}}$

4) $f(x) = (3x-4) \times \sqrt{7x-3}$

$= u(x) \times v(x)$

avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = 3x-4 \quad , \quad u'(x) = 3 \\ v(x) = \sqrt{7x-3} \quad , \quad v'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}} \end{array} \right.$ [voir quest. 3)]

donc $f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

$= \underline{(3x-4) \times \dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}} + 3 \times \sqrt{7x-3}}$

Ex3 :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

3) FORME INDETERMINÉE.

4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

5) FORME INDETERMINÉE

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{f(x)} = -\infty$

Ex4 : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{2x^2-5}$: Par le théorème du quotient des monomes du plus haut degré on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{2x^2-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

par quotient

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{1-x}$: On a $\lim\limits_{x \to 1} 2x+1 = 3$ [par continuité]

$\lim\limits_{x \to 1} 1-x = 0$ [par continuité]

or $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} 1-x = 0^-$

Ainsi, par quotient $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{1-x} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+1}{(x+2)^2}$: On a par continuité

$\lim\limits_{x \to -2} 2x+1 = -3$; $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)^2 = 0$

Or $(x+2)^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc

$$\lim_{x \to -2} (x+2)^2 = 0^+$$

donc par quotient $\lim_{x \to -2} \frac{2x+1}{(x+2)^2} = \underline{-\infty}$

4) $\underline{\lim_{x \to +\infty} 1 - x + \frac{3}{1-x}}$: On a $\lim_{x \to +\infty} 1-x = -\infty$

donc par quotient $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1-x} = 0$

Ainsi, par somme, $\lim_{x \to +\infty} 1-x+\frac{3}{1-x} = \underline{-\infty}$.

5) $\underline{\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}}$: On a par continuité :

$$\lim_{x \to 3} x^2-5x+6 = \lim_{x \to 3} x^2-6x+9 = 0$$

Ainsi, pour $x \neq 3$ on a : $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} = \frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{(x-3)^{\cancel{2}}}$

avec [par continuité] $\lim_{x \to 3} x-2 = \underline{1}$

$\underline{\text{et}}$ $\lim_{x \to 3} x-3 = 0$ or $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ donc

$$\lim_{x \to 3^-} x-3 = 0^-$$

Ainsi par quotient $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-2}{x-3} = \underline{-\infty}$

6) $\underline{\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-1}{2x^2-5x-7}}$: On par continuité :

$\lim_{x \to -1} x^2-1 = 0$ et $\lim_{x \to -1} 2x^2-5x-7 = 0$

On peut ainsi factoriser les numerateur et le denominateur

pour $x \neq -1$ (proche de -1) on a : $\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x-7} = \dfrac{(x-1)(1+x)}{2(x+1)(x-\frac{7}{2})}$

$$= \frac{x-1}{2(x-7/2)}$$

On a [par continuité] : $\lim\limits_{x\to -1} x-1 = -2$ et $\lim\limits_{x\to -1} 2(x-\frac{7}{2}) = -9$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{2(x-7/2)} = \dfrac{2}{9}$

et en particulier :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{2x^2-5x+7} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{2(x-7/2)} = \frac{2}{9}$$

Ex 5 : 1) On a : $f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(3) = 0$

2) Puisque $f(x)$ est un trinôme que s'annulle en -2 et 3 on a :

$$f(x) = a(x+2)(x-3)$$

Or $f(0) = 3 = a \times 2 \times (-3)$

d'où $a = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)(x-3)$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

3) On a graphiquement :
$$g(-4) = 3 \text{ et } g(2) = -1$$

4) g est une fonction affine donc
$g(x) = ax + b$ avec
$$a = \frac{g(-4) - g(2)}{-4 - 2} = \frac{3+1}{-6} = -\frac{2}{3}$$
d'où $g(x) = -\frac{2}{3}x + b$

$$g(2) = -1 \iff -\frac{2}{3} \times 2 + b = -1$$
$$\iff b = -1 + \frac{4}{3}$$
$$\iff b = \frac{1}{3}$$

Ainsi $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5) Graphiquement on a : $h(0) = 1$ et $h(1) = 3$
Puisque h est une fonction affine on a :
$h(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Or $h(0) = 1$ donc $b = 1$
et $a = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = \frac{3-1}{1} = 2$

Ainsi : $h(x) = 2x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

6) Graphiquement on a dans $[-3;2]$:

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_h$ dans $[-3;1]$

$\mathcal{C}_f$ intersecte $\mathcal{C}_h$ en $x=1$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_h$ dans $[1;2]$.

7) $f(x) \geq g(x)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3 \geq -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -3x^2+3x+18 \geq -4x+2$

$\Leftrightarrow -3x^2+7x+16 \geq 0$

$\Delta = 49+12\times 16 = 49+192 = 241 > 0$

on a donc 2 racines distinctes

$x_- = \frac{-7-\sqrt{241}}{-6} = \frac{7+\sqrt{241}}{6}$

$x_+ = \frac{7-\sqrt{241}}{6}$

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{241}}{6}$		$\frac{7+\sqrt{241}}{6}$		$+\infty$
$-3x^2+7x+16$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $S = \left[\frac{7-\sqrt{241}}{6} ; \frac{7+\sqrt{241}}{6}\right]$

Ex6 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{2-x}$

1) Pour $f(x)$ existe il faut et il suffit que $2-x \neq 0$

$$2-x=0 \iff x=2$$

Donc $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

Par le théorème du quotient des monomes du plus haut degré on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

Ces calculs de limite ne fournissent aucune asymptote

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$:

Par continuité on a : $\lim\limits_{x \to 2} x^2+4x+3 = 15$

et $\lim\limits_{x \to 2} 2-x = 0$

or $2-x \geq 0 \iff x \leq 2$

donc $\lim\limits_{x \to 2^-} 2-x = 0^+$ et donc par quotient

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

On a aussi $\lim_{x \to 2^+} 2-x = 0^-$

et donc par quotient $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Ces deux resultats indiquent que la droite d'equation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ representant f.

3) Soit $x \in D_f$ on a :

$$ax+b+\frac{c}{2-x} = \frac{(ax+b)(2-x)+c}{2-x}$$

$$= \frac{-ax^2+x(2a-b)+2b+c}{2-x}$$

Ainsi, par identification on a :

$$\frac{-ax^2+x(2a-b)+2b+c}{2-x} = \frac{x^2+4x+3}{2-x} \text{ pour tout } x \in D_f$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ 2a-b=4 \\ 2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \\ c=15 \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = -x-6+\frac{15}{2-x}$ pour $x \in D_f$

4) Soit Δ la droite d'équation $y=-x-6$

On a $f(x)-y = \frac{15}{2-x}$ or $\lim_{x \to -\infty} 2-x = +\infty$ donc par quotient $\lim_{x \to -\infty} [f(x)-y] = 0$ de même $\lim_{x \to +\infty} [f(x)-y] = 0$

Ainsi la droite D est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

5) $f(x) - (-x-6) = \dfrac{15}{2-x}$

$2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$, ainsi en vertu de la regle des signe [car $15 > 0$] on a :

$$\frac{15}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x < 2$$

i.e $f(x) - (-x-6) \geq 0 \Leftrightarrow x < 2$

d'où : • $\mathcal{C}_f$ est au dessus de D pour $x < 2$

• $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D pour $x > 2$