DAEU-B DS 4 Le 8 avril 2017

Durée: 2^{h} **Calculatrice interdite**

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Le total des exercices est noté sur 41 points ; la note finale correspondra à la somme des points divisée par 2

Exercice 1 `[4pt]`

1) `[1pt]` On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}.$$

Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}.$$

a) `[1pt]` Déterminer une expression fonctionnelle de (u_n) [*i.e.* trouver une fonction f tel que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$].

b) `[0,5pt]` Calculer u_{1000}.

3) On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = -4 \end{cases}.$$

a) `[1pt]` Déterminer une expression fonctionnelle de (u_n) [*i.e.* trouver une fonction f tel que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$].

b) `[0,5pt]` Calculer u_9.

Exercice 2 `[6pt]` Calculer les dérivées des fonctions suivantes [on ne précisera ni le domaine de définition des fonctions ni celui des dérivées].

1) `[1pt]` $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

2) `[1,5pt]` $f(x) = (2x+3)^3$

3) `[1,5pt]` $f(x) = \sqrt{7x-3}$

4) `[2pt]` $f(x) = (3x-4)\sqrt{7x-3}$

Exercice 3 `[3pt]` Déterminer dans chaque cas la limite demandée en tenant compte des hypothèses. S'il n'est pas possible de répondre, vous écrirez : "Forme Indéterminée". Aucune justification n'est demandée.

1) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$ sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -5$.

2) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$ sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$ sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

4) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{f(x)}$ sachant que $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0^-$.

5) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{f(x)}$ sachant que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0^-$.

6) `[0,5pt]` Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)}$ sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$.

Exercice 4 [10pt] Déterminer les limites suivantes :

1) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{2x^2-5}$

2) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{1-x}$

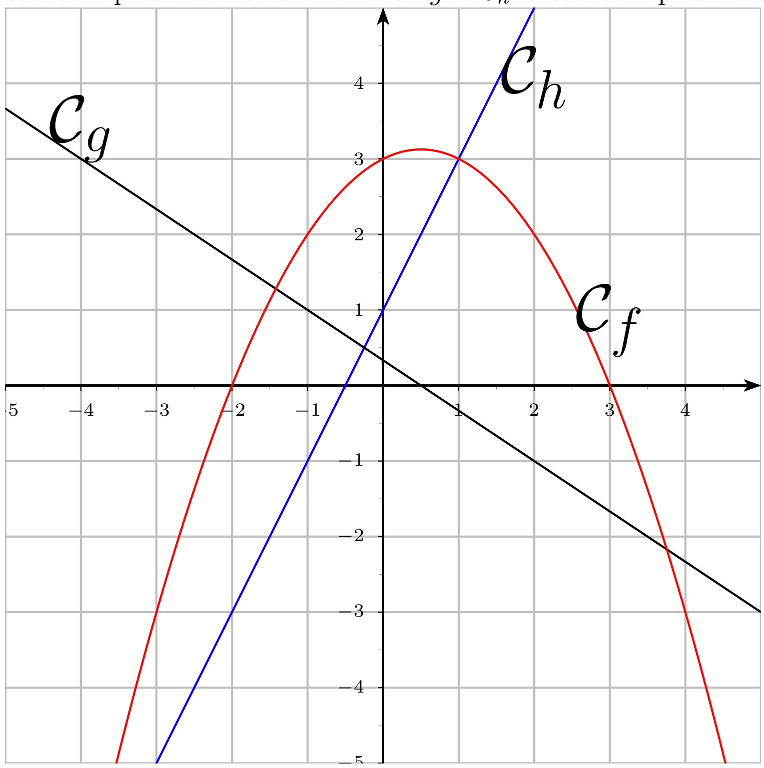
3) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$

4) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x+\dfrac{3}{1-x}$

5) [2pt] $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$

6) [2pt] $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-1}{2x^2-5x-7}$

Exercice 5 [9pt] Soient f,g et h trois fonctions. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g et $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.



1) [1pt] Graphiquement donner l'image de -2 puis de 0 et de 3 par la fonction f.

2) [2pt] Sachant que la fonction f est un polynôme du second degré, déterminer $f(x)$.

3) [1pt] Graphiquement donner l'image de -4 puis de 2 par la fonction g.

4) [1pt] Sachant que g est une fonction affine, déterminer $g(x)$.

5) [1,5pt] Sachant que h est une fonction affine, déterminer $h(x)$.

6) [1pt] Etudier graphiquement sur $[-3;2]$ la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_h$.

7) [1,5pt] Résoudre, par le calcul sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

Exercice 6 [9pt] On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2-x}.$$

1) [0,5pt] Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) [4pt] Déterminer les limites de f sur le bords de son ensemble de définition [il y a normalement quatre limites à calculer !]. En déduire la présence d'éventuelle(s) asymptote(s) à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

3) [1,5pt] Déterminer trois nombres réels a,b et c tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}.$$

4) [1,5pt] Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera une équation, au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

5) [1,5pt] Étudier suivant les valeurs de x la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.