DAEU-B — DS 5 — Le 27 mai 2017

Durée: 2^{h} — **Calculatrice interdite**

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Le total des exercices est noté sur 40 points ; la note finale correspondra à la somme des points divisée par 2

Exercice 1 [6pt] Déterminer les limites suivantes :

1) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x-x^3+4}{7x^3+x^2-x+1}$

2) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to-3^-} 2x^2+4x-6x^2+x-6$

3) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+4x-6}$

4) [1,5pt] $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{2x+1}x^2$

Exercice 2 [5,5pt] Calculer les dérivées des fonctions suivantes [on ne précisera ni le domaine de définition des fonctions ni celui des dérivées].

1) [1pt] $f(x) = \dfrac{5x^2-x+3}{2x+5}$

2) [1pt] $f(x) = (x^2-7x+3)^{17}$

3) [1,5pt] $f(x) = \sqrt{x^4-5x+4}$

4) [2pt] $f(x) = (x^2-x)\sqrt{5x^2+4}$

Exercice 3 [13pt] Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2}.$$

On note C_f sa courbe représentative.

1) [1,5pt] Étudier la limite de f en $+\infty$. Préciser si ce calcul de limite fournit ou non la présence d'une asymptote à C_f [le cas échéant préciser la nature de l'asymptote ainsi qu'une équation].

2) [1,5pt] Étudier la limite de f en 2^+. Préciser si ce calcul de limite fournit ou non la présence d'une asymptote à C_f [le cas échéant préciser la nature de l'asymptote ainsi qu'une équation].

3) [1,5pt] Calculer f' la dérivée de f et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}.$$

4) [2pt] Dresser le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

5) [1,5pt] Determiner une équation de T la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

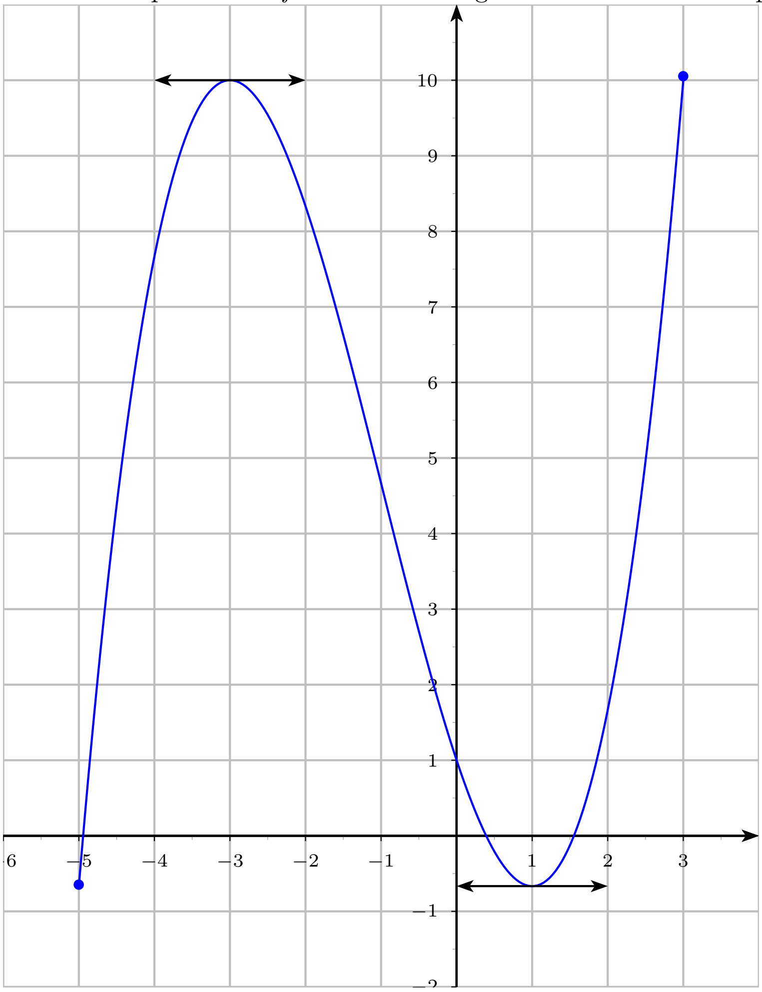
6) [2pt] Trouver trois réels a,b,c tels que pour $x\in]2,+\infty[$ on a

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-2}.$$

7) [1,5pt] En déduire que la courbe C_f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ [on précisera l'équation de l'asymptote oblique].

8) [1,5pt] Étudier la position relatif de C_f par rapport à Δ.

Exercice 4 [12,5pt] On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-dessous le graphe de f sur l'intervalle $[-5{,}3]$.
La courbe représentant f admet une tangente horizontale en les points d'abscisses -3 et 1.



1) **a)** [2pt] Determiner par lecture graphique $f(0)$, $f(-3)$, $f'(-3)$ et $f'(1)$.

b) [3pt] On admet qu'il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

En utilisant la question précédente trouver les valeurs de a,b,c et d.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$.

a) [2pt] Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) [2pt] Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}$.

c) [1,5pt] Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant g au point d'abscisse 2.

d) [2pt] Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1{,}2]$.

Exercice 5 [3pt] Determiner les dimensions du rectangle de périmètre 8 ayant la surface maximale.