DAEU-B — DS Final — Le 24 juin 2017

Durée: 3^{h} **Calculatrice interdite**

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Le total des exercices est noté sur 60 points ; la note finale correspondra à la somme des points divisée par 3

Ce sujet est divisé en deux parties. Il est important de traiter ces deux parties sur des copies séparées.

Partie I

Exercice 1 `[8pt]` Dans cet exercice chaque question est indépendante.

1) `[1,5pt]` ABC est un triangle tel que $AB = 8$cm, $AC = \sqrt{32}$cm et $BC = \sqrt{96}$cm. Ce triangle est il un triangle rectangle ? Si oui préciser où se trouve l'angle droit.

2) `[1,5pt]` DEF est un triangle tel que $DE = \sqrt{8}$cm, $EF = \sqrt{32}$cm et $DF = \sqrt{96}$cm. Ce triangle est il un triangle rectangle ? Si oui préciser où se trouve l'angle droit.

3) GHI est un triangle rectangle en G tel que $GH = 3\sqrt{2}$cm et $HI = 6cm$.

- **a)** `[1,5pt]` Calculer la mesure exacte, en degré, de l'angle $\widehat{GIH}$.
- **b)** `[1,5pt]` Determiner la longueur GI.

4) `[2pt]` Un nombre x désigne la mesure, en degré, d'un des deux angles aigus d'un triangle rectangle. Sachant que $\cos(x) = \dfrac{1}{5}$, determiner la valeur exacte de $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

Exercice 2 `[9pt]`Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) `[1,5pt]` $(5x-2)(5x-10)-(3x+2)(x-2)=0$

2) `[1pt]` $\dfrac{2x+7}{3} < \dfrac{x-9}{4}$

3) `[1,5pt]` $\mathrm{e}^{x^2+3x-10} = 1$

4) `[1,5pt]` $x^3 = 16x - 6x^2$

5) `[1,5pt]` $25x^2 - 30x + 9 < 1$

6) `[2pt]` $\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{-3x^2} < \mathrm{e}^2$

Exercice 3 `[3pt]` Un terrain de sport a la forme d'un rectangle dont le périmètre est de 840 m. Déterminer la longueur et la largeur de ce terrain sachant que leur différence est de 180 m.

Exercice 4 `[4pt]` Soient A,B,M et N quatre points tels que

$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \text{ et } -2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}.$$

1) `[1,5pt]` Exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) `[1pt]` En déduire que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$

3) `[1,5pt]` Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que I est également le milieu de $[MN]$.

Exercice 5 `[6pt]` Dans un repère orthonormal on considère les points $A(-4;2)$, $B(-2;-4)$, $C(5;-3)$, $D(4;6)$. On note I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1) `[1,5pt]` Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ils colinéaires ?

2) `[1,5pt]` Calculer les coordonnées des points I,J,K et L.

3) `[1,5pt]` Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

4) `[1,5pt]` Le quadrilatère $IJKL$ peut il être un carré ? Justifier.

Partie II

Exercice 6 `[13,5pt]` On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}.$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1) `[1,5pt]` Déterminer les limites de la fonction f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) `[2pt]` Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f et montrer que $f'(x)$ peut s'écrire

$$f'(x) = \left[\frac{3(x-1)(x+1)}{3x^2+1}\right]^2.$$

3) `[1,5pt]` Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

4) `[1pt]` Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

5) **a)** `[1pt]` Développer $(x-1)^3$.

b) `[1,5pt]` Determiner trois réels a,b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}.$$

6) `[1,5pt]` En déduire la présence d'une asymptote oblique Δ, dont on précisera l'équation, au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

7) `[1,5pt]` Étudier la position relative de C_f par rapport à Δ.

8) `[2pt]` Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 10]$.

Exercice 7 `[16,5pt]` Dans cet exercice le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (x+2) \times \mathrm{e}^{1/x}.$$

Soit C_f sa courbe représentative.

1) `[1pt]` Determiner le domaine de définition de f.

2) `[1pt]` Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur son domaine de définition.

3) `[4pt]` Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition. Préciser si ces calculs de limite permettent d'obtenir l'existence d'éventuelles asymptotes.

4) `[2pt]` Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f et montrer que $f'(x)$ peut s'écrire

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \times \mathrm{e}^{1/x}.$$

5) `[2pt]` Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

6) `[1pt]` Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 5.

Partie B. On considère la fonction $g(x)$ définie par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^x.$$

Soit C_g sa courbe représentative.

1) `[2,5pt]` Determiner le domaine de définition de g et déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition. Préciser si ces calculs de limite permettent d'obtenir l'existence d'éventuelles asymptotes.

2) `[3pt]` Dresser le tableau de variation complet de la fonction g.