Fiche 4
Résolution d'inéquations

1 Une inéquation ?

Une **inéquation** est une **question**. Contrairement à une équation, la question posée ne porte pas sur une égalité mais sur une comparaison entre deux quantités :*pour quelles valeurs de l'inconnue a-t-on la première quantité qui est plus grande (ou plus petite) que la seconde ?*

Ainsi, là où une équation traitait d'un cas d'égalité (symbolisé par le signe "="), une inéquation traite d'une inégalité exprimée à travers l'un des quatre symboles suivants

$\geq$: *supérieur ou égal*, par exemple $2x + 1 \geq 3$

$\leq$: *inférieur ou égal*, par exemple $2x + 1 \leq 3$

$>$: *strictement supérieur*, par exemple $2x + 1 > 3$

$<$: *strictement inférieur*, par exemple $2x + 1 < 3$.

Une solution d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie. Par exemple, pour l'inéquation $7x - 4 \leq 5$:

- la valeur $x = -1$ **est une solution** de l'inéquation car pour $x = -1$ on a $7x - 4 = 7 \times (-1) - 4 = -11$ et $-11 \leq 5$;
- la valeur $x = 2$ **n'est pas une solution** de l'inéquation car pour $x = 2$ on a $7x - 4 = 7 \times 2 - 4 = 10$ et $10 \not\leq 5$.

Exercice 1

1. On considère l'inéquation $3x + 7 > 1 - 3x$.
   (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ?
   (b) Le nombre -2 est-il solution de cette inéquation ?
   (c) Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ?
2. On considère l'inéquation $-x - 4 \leq -2x$.
   (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ?
   (b) Le nombre 2 est-il solution de cette inéquation ?
   (c) Le nombre 4 est-il solution de cette inéquation ?
3. On considère l'inéquation $3x + 4 \geq 1$.
   (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ?
   (b) Le nombre -2 est-il solution de cette inéquation ?
   (c) Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ?

4. On considère l'inéquation $10x + 7 < -3$.
   (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ?
   (b) Le nombre -5 est-il solution de cette inéquation ?
   (c) Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ?

2 La résolution

Résoudre une inéquation c'est trouver l'ensemble des solutions à l'inéquation, *i.e.* trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Contrairement aux équations, les inéquations ont en général un très grand nombre de solutions (une infinité de solutions).

Plus précisément, très souvent l'ensemble des solutions à une équation est un intervalle ou bien une union d'intervalles.

L'idée à garder en tête pour résoudre une inéquation est la même que celle pour les équations: **éplucher l'inéquation afin d'isoler l'inconnue**.

Il faut garder en tête les règles suivantes :

- on ne change pas une inégalité en additionnant (ou en soustrayant) un même nombre aux deux membres de l'inégalité ;
- on ne change pas une inégalité en multipliant (ou en divisant) par un même nombre **strictement positif** les deux membres de l'inégalité ;
- on **inverse** le sens de l'inégalité en multipliant (ou en divisant) par un même nombre **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité.

Par exemple

$$\begin{array}{rcl} 3x+7 & > & 1-3x \\ 6x & > & -6 \\ x & > & -1 \end{array}$$
$\mathcal{S} =]-1, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} 6x-4 & \leq & 2x \\ 4x & \leq & 4 \\ x & \leq & 1 \end{array}$$
$\mathcal{S} =]-\infty, 1]$

$$\begin{array}{rcl} 3x+4 & \geq & 1 \\ 3x & \geq & -3 \\ x & \geq & -1 \end{array}$$
$\mathcal{S} = [-1, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} 10x+7 & < & -3 \\ 10x & < & -10 \\ x & < & -1 \end{array}$$
$\mathcal{S} =]-\infty, -1[$

Essentiellement, la différence la plus notable lors de la résolution d'une inéquation par rapport à la résolution d'une équation réside dans la **multiplication ou bien la division des deux cotés** par un même nombre **strictement négatif**. Lorsque l'on manipule une inéquation :

Si on multiplie ou si on divise des deux cotés par un nombre strictement négatif, <u>alors il faut</u> **inverser le sens de l'inégalité**.

Par exemple

$$\begin{array}{rcll} -3x+7 & > & 1+3x & \\ -6x & > & -6 & \\ x & < & 1 & \texttt{on inverse l'inégalité} \end{array}$$
$\mathcal{S} =]-\infty, 1[$

$$\begin{array}{rcll} -x-4 & \leq & 2x & \\ -3x & \leq & 4 & \\ x & \geq & -4/3 & \texttt{on inverse l'inégalité} \end{array}$$
$\mathcal{S} = [4/3, \infty[$

$$\begin{array}{rcll} -3x+4 & \geq & 1 & \\ -3x & \geq & -3 & \\ x & \leq & 1 & \texttt{on inverse l'inégalité} \end{array}$$
$\mathcal{S} =]-\infty, 1]$

$$\begin{array}{rcll} -10x+7 & < & -3 & \\ -10x & < & -10 & \\ x & > & 1 & \texttt{on inverse l'inégalité} \end{array}$$
$\mathcal{S} =]1, \infty[$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes

1. $x \leq 7$
2. $3x > 2$
3. $2x + 4 \geq 0$
4. $-4x + 1 < 2x$
5. $4x + 2 \leq 3 - x$
6. $x + 7 > 3 - x$

Mais comme pour les équations il y a aussi des cas où il faut être attentif :

Exercice 3

1. $3x + 4 > 3x$
2. $2x + 1 \leq 2(x - 1)$
3. $5x + 3 \geq 4x - 1 + x$
4. $14x + 3 - 7x < 7x - 1$
5. $12x - 1 \leq 4[x + 2(x - 1)]$
6. $-x + 1 > -x$

Exercice 4 Un vidéo-club propose deux formules de location de cassettes.
Formule A : abonnement d'un an pour 18 euros, puis 4 euros par cassette louée ;
Formule B : sans abonnement, 6 euros par cassette louée.
A partir de combien de cassettes louées a-t-on [strictement] intérêt à choisir la formule A ?

Exercice 5 Résoudre chacune des inéquations suivantes et hachurer, sur une droite graduée, l'ensemble des nombres qui sont solutions.

1. $x - 7 > 2$
2. $x + 9 < 4$
3. $x + 8 \leq -2x + 5$
4. $13 > 8 + x$
5. $-3x \geq 7$
6. $7x - 3(5 - 2x) \geq 13x - 21$
7. $5x - (3x - 3) \geq 3 + 2x$
8. $5x - (3x - 3) > 3 + 2x$
9. $\dfrac{2x + 3}{9} - \dfrac{3x - 5}{6} \leq 2x$

3 Une étude de signe

L'une des notions/techniques les plus importantes parmi celles qui seront abordées cette année est l'étude du signe d'une quantité A.

Une étude de signe correspond à la résolution de l'inéquation $A \geq 0$ c'est à dire répondre à la question :

Quand est-ce que la quantité A est-elle positive ?

Avant de continuer, une petite remarque sur laquelle méditer :
Remarque.

- Une fois que l'on a résolu l'inéquation $A \geq 0$, alors on a aussi l'ensemble des solutions à $A < 0$.
- De plus, si on résout l'équation $A = 0$, alors on peut facilement obtenir l'ensemble des solutions pour les inéquations $A > 0$ et $A \leq 0$.
- Savoir étudier de manière rigoureuse le signe d'une quantité est très souvent un bon moyen pour résoudre n'importe laquelle des inéquations. En effet, l'inéquation $B \geq C$ est équivalente à l'inéquation $B - C \geq 0$ et donc à l'étude du signe de $B - C$.

L'idée pour étudier le signe d'une quantité A est extrêmement simple et repose uniquement sur la *règle des signes* **correctement** appliquée.

Par exemple, avec des nombres, le produit

$$(-5) \times 2 \times (-8) \times (-2589647856) \times 13$$

est il positif ?

Pour répondre à cette question, pas la peine de se lancer dans des grands calculs, il suffit de compter les facteurs négatifs qui apparaissent dans le produit. En l'occurrence, le produit compte 3 facteurs négatif et donc, puisque 3 est un nombre impair, le produit est négatif.

La méthode générale pour étudier le signe d'une quantité A (résoudre l'inéquation $A \geq 0$) est la suivante :

Étape 1. Écrire A sous une forme factorisée (si possible une forme factorisée au maximum) `[par exemple` $A = B \times C$`]` ;

Étape 2. Étudier le signe de chacun des facteurs `[résoudre` $B \geq 0$ `et` $C \geq 0$`]` ;

Étape 3. Utiliser la règle des signes afin d'en déduire le signe de $A = B \times C$ `[utiliser un tableau de signes]`.

Par exemple pour résoudre l'inéquation $(x+1)(x-2)+(x-2)^2 \geq 0$ on suit la méthode :

Étape 1. Puisque $(x+1)(x-2)+(x-2)^2$ n'est pas sous forme factorisée, on factorise :

$$(x+1)(x-2)+(x-2)^2 = (x+1+x-2)(x-2) = (2x-1)(x-2);$$

Étape 2. On étudie le signe de chacun des facteurs

$$2x-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1/2 \qquad\qquad x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$$

Étape 3. On fait un tableau de signes

x	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut ainsi facilement résoudre $(2x-1)(x-2) \geq 0$ en lisant le tableaux :

$$\mathcal{S} =]-\infty, 1/2] \cup [2, +\infty[.$$

On vient donc de résoudre $(x+1)(x-2)+(x-2)^2 \geq 0$ puisque $(2x-1)(x-2)$ est la forme factorisée de $(x+1)(x-2)+(x-2)^2$.

Exercice 6 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x-4)(x-3) \geq 0$
2. $(1-2x)(x+2) \geq 0$
3. $(5-x)(x-7) < 0$
4. $5x(3x-2)(x+5) > 0$
5. $x^2 - 9 > 0$
6. $(1-x^2)(x-4) \geq 0$

Exercice 7 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x-3)(4-5x) > 0$
2. $(3x-2)^2 - (x+1)^2 \geq 0$
3. $(2-3x)^2 < (3-5x)^2$
4. $(2-3x)^2 \leq (2-3x)(3-5x)$
5. $(3-2x)^2 - 16 \leq 0$
6. $(7-5x)^2 - (3x+1)^2 \leq 0$