Fiche 5
Équations et inéquations du second degré

1 Équation du second degré

Définition. On appelle équation du second degré toutes les équations qui peuvent se ramener à la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } \textbf{surtout} \text{ avec } a \neq 0$$

L'expression littérale $ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du second degré.
Exemple/Contre-exemple :

- l'équation $x^2 = 3x - 4$ peut se ramener à l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ et est donc de la forme précédente avec $a = 1 \neq 0, b = -3, c = 4$
- l'équation $-(x - 1)^2 = 0$ peut s'écrire $-x^2 + 2x - 1 = 0$ et est donc de la forme précédente avec $a = -1 \neq 0, b = 2, c = -1$
- l'équation $x^2 = x^2+2x-1$ s'écrit, en mettant le membre de droite égale à 0, $-2x+1 = 0$ et n'est donc de la forme précédente car, par identification on a $a = 0$.

Définition. On appelle racine d'un trinôme ax^2+bx+c toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple. 1 est une racine du trinôme $x^2 - 2x + 1$ mais 2 n'en est pas une racine.

Le but de cette fiche est de trouver, si elles existent, **toutes** les racines d'une trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), *i.e.*, résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On verra en particulier qu'une telle équation a soit 2 solutions, soit 1 solution soit aucune solution réelle.

2 Résolution d'une équation du second degré

Dans cette section on énonce la démarche afin de résoudre les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. Une preuve de cette stratégie est proposée en exercice.

On se donne donc trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on suppose que $a \neq 0$. La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ se fait en deux étapes:

Étape 1. On *classifie* le trinôme $ax^2 + bx + c$
On calcule le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$.
Le calcul de Δ permet de savoir si notre équation a 0 ou bien 1 ou bien 2 solution(s).

> *N.B. :* `discriminant` *est le participe présent du verbe* `discriminer`.
> Définition du LAROUSSE pour `discriminer` :
> *Établir une différence entre des personnes ou des choses en se fondant sur des critères distinctifs.*

1. $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution (réelle).

2. $\Delta = 0$ l'équation a une seule solution (double).

3. $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions distinctes.

Étape 2. Si le trinôme admet des racines on les calcule

1. $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution (réelle) ... donc rien à calculer !

2. $\Delta = 0$ l'unique solution de l'équation est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

3. $\Delta > 0$ les deux solutions de l'équation sont :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque. Le cas où $\Delta = 0$ peut être vu comme le "cas limite de $\Delta > 0$" avec les deux racines qui sont égales (car $\Delta = 0$). C'est pour cela que si $\Delta = 0$, on dit que $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est **la** *racine double* du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples.

- $x^2 - 2x + 1 = 0$ ici $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, ainsi on a une unique solution $x_0 = \dfrac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$.

  En effet, on peut aussi voir que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc

  $$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

- $2x^2 - 5x - 4 = 0$ ici $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 57 > 0$ d'où deux solutions distinctes qui sont

  $$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{54}}{2 \times 2} = \frac{5+\sqrt{54}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{54}}{2 \times 2} = \frac{5-\sqrt{54}}{4}.$$

- $x^2 + 1 = 0$; $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$ pas de solution réelle. En effet $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier $x^2 + 1$ ne s'annule jamais.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
2. $5x^2 - 9x + 3 = -4x^2 + 3x - 1$
3. $3x^2 = 2 - x$
4. $x^2 - 3x + 7 = 0$
5. $5x + 2 = 3x^2$
6. $2x^2 - 2x - 1 = 0$
7. $(2x-1)(x+1) = x(x-1)$
8. $x^2 + 2x + 2 = 0$
9. $x^2 - 7x = 7x^2 + 2$
10. $(x-3)(x+2) = 5x - 16$

3 Factorisation et signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

3.1 La factorisation

On va voir que connaitre les racines d'un trinôme permet de le factoriser facilement. Par un argument déjà vu, si on a une forme factorisée d'un trinôme, alors il est facile d'en déduire ses racines. Ainsi, on peut retenir que factoriser un trinôme correspond à un problème équivalent à la recherche de ses racines.

On considère un trinôme ax^2+bx+c (avec $a \neq 0$) et on note $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant. On a

- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ ou x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, alors il n'existe pas de factorisation du trinôme.

Exercice 2 Dire si les trinômes suivants sont factorisables et s'ils le sont, en donner une factorisation.

1. $x^2 - 5x + 3$
2. $3x^2 - x - 4$
3. $3x^2 - 2x + 7$
4. $5x^2 + 6x - 4$
5. $-x^2 + 3 - 4$
6. $-6x^2 + 4x + 1$

Exercice 3 $\star$ On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On suppose que $\Delta > 0$ et donc le trinôme a deux racines x_1 et x_2.

Montrer **de deux manières différentes** que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

3.2 Le signe d'un trinôme

Etudions le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Pour cela on divise la présentation suivant $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

3.2.1 Si $\Delta > 0$:

Soient x_1 et x_2 ses racines, avec (pour se fixer les idées) $x_1 < x_2$.
On a alors, la factorisation suivante : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Pour résumer, on peut dire que :
$ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre ses racines et du signe de a à l'extérieur des racines.

3.2.2 Si $\Delta = 0$:

Puisque dans ce cas $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ et puisque $(x - x_0)^2$ est toujours positif on a $ax^2 + bx + c$ qui est du signe de a.

3.2.3 Si $\Delta < 0$:

On peut montrer que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (cette égalité est vraie même si $\Delta \geq 0$). Comme Δ est strictement négatif, l'expression entre crochets est strictement positive, le signe de $ax^2 + bx + c$ est donc le même que celui de a.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-4x^2+4x+15 \geq 0$
2. $x^2+2x \leq 1$
3. $3x-x^2 \leq x^2+4$
4. $x^2+2x-2<0.$
5. $x^2-7x>7x^2+2.$
6. $(x-3)(x+2)>5x.$

Exercice 5

1. (a) Étudier le signe du trinôme : $-2x^2+4x+6$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $4x+6 \geq 2x^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x+1>0$

4 Encore des exercices

Exercice 6 En deux ans, une production a augmenté de 68 %. La première année, elle a augmenté de a% et la seconde année l'augmentation en pourcentage a doublé.
Déterminer l'augmentation en pourcentage au cours de la première année.

Exercice 7 Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire sachant que son périmètre est $34\,m$ et que ses diagonales mesurent chacune $13\,m$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2-\frac{5}{x+2}=\frac{2}{x-1}.$$

Exercice 9 $\star$ Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de solutions (x est l'inconnue) de :

$$x^2-3mx+2m^2=0 \text{ et } x^2+2mx+m^2+m+1=0$$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes :

- $x^4-13x^2+36=0$
- $6x+\sqrt{x}-1=0$
- $-2x+1=\sqrt{x^2+5}$

Exercice 11 $\star$ On propose de démontrer le théorème du second degré précédemment énoncé.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$. On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$.

1. Developper l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.
2. À l'aide de la question précédente, trouver l'expression de $\Delta \in \mathbb{R}$ afin de pouvoir écrire

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

   Cette expression s'appelle la forme canonique.

3. En déduire que si $\Delta<0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution.
4. Si $\Delta=0$ résoudre $ax^2+bx+c=0$.
5. Si $\Delta>0$ résoudre $ax^2+bx+c=0$.