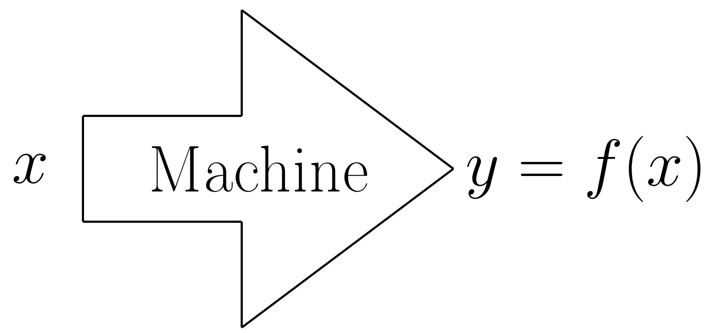
Fiche 7
Fonctions I : Premières Définitions et Généralités

En mathématiques, les fonctions sont des transformations : chacune de ces transformations peut être représentée par une machine qui prend un nombre x et le transforme en un autre nombre y appelé *l'image* de x. Souvent la transformation est désignée par une lettre (par exemple f), dans ce cas on note $y = f(x)$ et la transformation s'écrit $f : x \mapsto f(x)$ ou bien $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$.



$$x \xmapsto{\quad f \quad} f(x)$$

1 Motivations

Il est très fréquent de manipuler des quantités qui dépendent d'autres quantités, par exemple :

1. Si on va chez SuperPizza®, *le roi de la pizza à* 8€®, alors le prix à payer **est fonction du** nombre de pizzas que l'on prend ;
2. Si on loue une voiture pour une journée à 24€ la journée plus 0.1€ le kilomètre, le prix à payer **est fonction du** nombre de kilomètres parcourus ;
3. L'aire d'un carré **est fonction de** la longueur d'un de ses cotés ;
4. Le temps de parcourt d'une distance de 100 km à vitesse constante **est fonction de** la vitesse.

Exercice 1 Exprimer dans chacune des situations précédentes la relation qui relie les quantités en jeu :

1. On notera x le nombre de pizza(s) achetée(s) et $f(x)$ le prix payé ;
2. On notera x le nombre de kilomètres parcourus et $f(x)$ le prix payé ;
3. On notera x la longueur d'un coté du carré et $f(x)$ l'aire du carré ;
4. On notera x la vitesse de parcourt et $f(x)$ le temps de parcourt de 100 km à la vitesse constante égale à x (en km/h).

N.B. : Ici la notation générique $f(x)$ se lit "f de x" et est à voir comme une quantité qui est "fonction de x" (c'est à dire qui dépend de x).

2 Un peu de vocabulaire ... Et quelques exemples

2.1 Une fonction et son domaine de définition ?

Lorsque l'on se donne une fonction f, c'est à dire une transformation qui a x associe un nombre $f(x)$, il est naturel de se demander pour quelles valeurs de x, la transformation peut être faite. Plus précisément on s'intéresse à l'ensemble des x pour lesquels la transformation $x \mapsto f(x)$ ne peut pas être réalisée.

On peut rapidement lister les deux cas de figure où une transformation ne peut pas être réalisée :
Exemples.

- **Division par** 0**.** Puisque diviser par le nombre 0 est interdit, si on regarde la transformation qui à x associe son inverse $\dfrac{1}{x}$, alors la transformation ne peut pas être faite pour $x = 0$.
- **Racine carrée d'un nombre strictement négatif.** Par la définition de la racine carrée de x, $\sqrt{x}$ *est le nombre positif qui vérifie* $x = (\sqrt{x})^2$, x est forcément un carré et est donc positif. Ainsi, la transformation qui à x associe $\sqrt{x}$ ne peut pas être faite si x est strictement négatif.

L'ensemble de **tous** les nombres x pour lesquelles une transformation donnée f peut être réalisée [*i.e.* l'expression $f(x)$ n'utilise pas d'opérations interdites] s'appelle *le domaine de définition de* f.

Souvent on le note $\mathcal{D}_f$ pour souligner le fait que le domaine de définition est obtenu selon la fonction f.

Par exemple, si on donne :

1. $f(x) = x^2$ ou bien $f(x) = 2x + 1$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$: pour n'importe quelles valeurs de x on peut calculer $f(x)$;
2. $f(x) = \sqrt{x}$, alors $\mathcal{D}_f = [0, \infty[= \mathbb{R}^+$ car pour n'importe quel nombre positif x on peut calculer $f(x)$ par contre si x est strictement négatif, alors la racine carrée de x ne fait aucun sens.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ car pour n'importe quelle nombre x non nul on peut calculer $\frac{1}{x}$, par contre diviser 1 par 0 ne fait aucun sens.

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x} + x$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x+8}{2x-3}$
5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$
6. $f_6(x) = x^5$

Exercice 3 [$\star$] Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_7(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f_8(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3x-7}$
3. $f_9(x) = \sqrt{-x^2+x+1}$
4. $f_{10}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(5x-7)(3\pi x - \sqrt{2})}}$

2.2 Image/antécedent

On se donne f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

- Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on dit que $f(x)$ est l'*image de x par f*.

  $\rightsquigarrow$ Lorsque $x \in \mathcal{D}_f$, son image $f(x)$ **existe toujours et est unique**.

- Pour $\ell \in \mathbb{R}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_f$ solution de l'équation $\ell = f(x)$ s'appelle les *antécédents de ℓ par f*.

  $\rightsquigarrow$ Cet ensemble peut être noté $\mathcal{A}_\ell$ et peut être vide ou bien avoir un grand nombre d'éléments.

Exercice 4 Après avoir déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, déterminer les images et l'ensemble des antécédents aux valeurs demandées :

1. $f(x) = x^2$
   (a) Déterminer les images en 0, 1, -1 et 15
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   (a) Déterminer les images en 1, -1 et 10^{-1}
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.
3. $f(x) = 1$
   (a) Déterminer les images en 1, -1 et 10^{-1}
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.

2.3 Parité

Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

- Dire que f est **paire** signifie que $\begin{cases} \mathcal{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in I \text{ on a } f(-x) = f(x) \end{cases}$.

- Dire que f est **impaire** signifie que $\begin{cases} \mathcal{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in I \text{ on a } f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$ est paire.
2. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{1}{x}$ est impaire
3. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
   - la fonction $f(x) = x^n$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ si n est un nombre pair ;
   - la fonction $f(x) = x^n$ est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ si n est un nombre impair.
4. Montrer que la fonction $f(x) = 2x + 1$ n'est ni paire ni impaire.

3 La courbe représentative d'une fonction

3.1 Définition

On se donne un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et une fonction f dont le domaine de définition est noté $\mathcal{D}_f$.

La *courbe représentative de la fonction* f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont de la forme $M(x, f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$ c'est à dire:

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f\}$$

On dit alors que $y = f(x)$ est *l'équation de la courbe de f.*

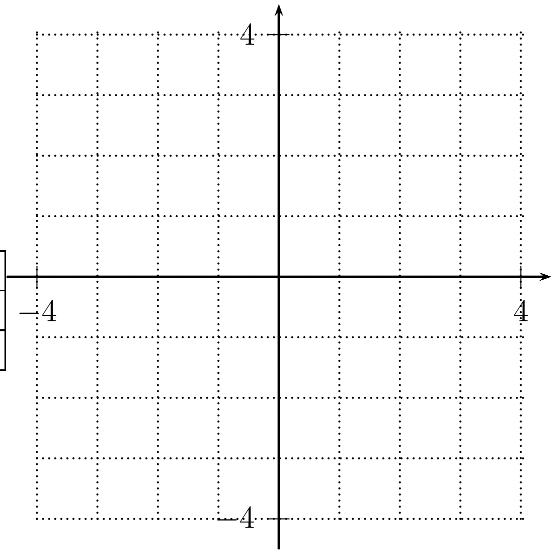
Remarque.

- Souvent on ne trace pas la courbe d'une fonction sur tout son domaine de définition.
- Si une fonction f est impaire alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet le point O comme centre de symétrie `[symétrie centrale]`.
- Si une fonction f est paire alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées (Oy) comme axe de symétrie `[symétrie axiale]`.

Exercice 6

1. Après avoir rempli le tableau suivant, tracer (au mieux !) les courbes des fonctions $f(x) = \dfrac{x}{2}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - 2$ sur l'intervalle $[-4, 4]$

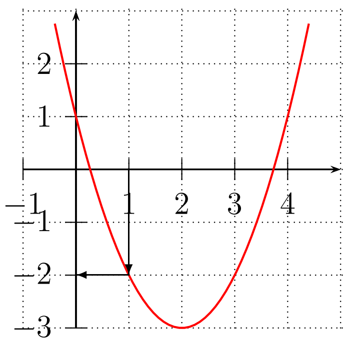
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									
$g(x)$									



2. En observant les symétries des courbes de f et de g, que pouvez-vous dire des éventuelles parités de f et de g ?

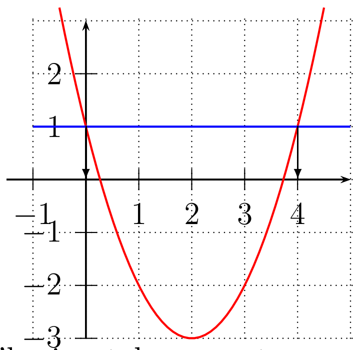
3.2 Lecture graphique

Lire l'image d'un nombre



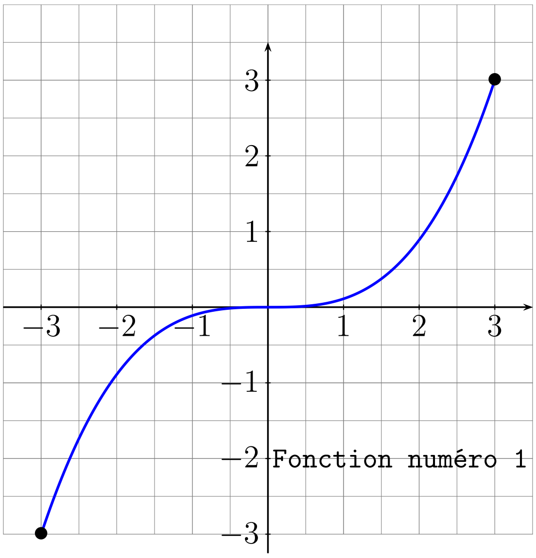
On place x sur l'axe des abscisses ;
On se déplace verticalement sur $\mathcal{C}_f$;
On lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées
L'image de 1 *par* f *est* -2

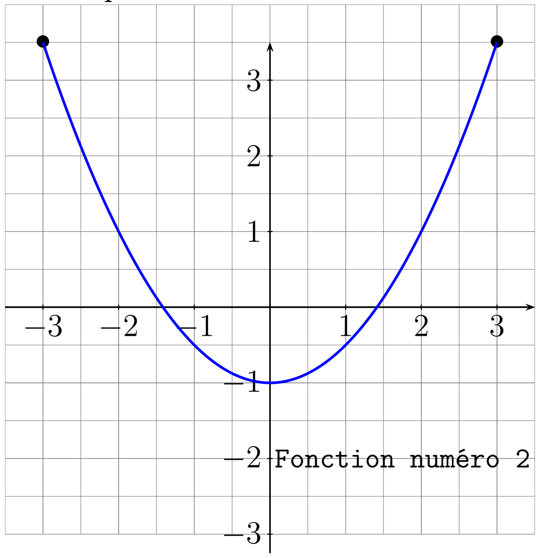
Trouver l'(les) antécédent(s) d'un nombre



On trace l'horizontale passant par cette valeur;
À partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents.
Les antécédents de 1 *par* f *sont* 0 *et* 4.

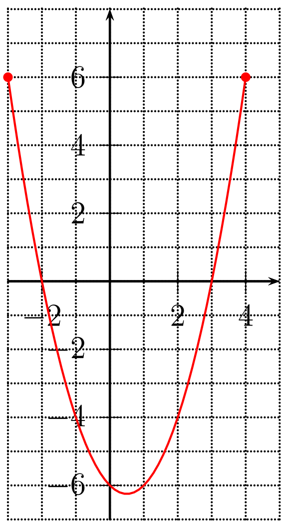
Exercice 7
Pour chacune des deux fonctions suivantes, répondre aux questions.





1. Selon vous, dire pour chacune des deux fonctions si elle est paire, impaire ou bien ni paire-ni impaire ?
2. Quelle est l'image de 0 par chacune des deux fonctions ?
3. Dire pour chacune des deux fonctions quels nombres ont pour image 0. [c'est une lecture graphique donc pas exacte]
4. Donner la valeur de :
   (a) l'image de -2 par la fonction numéro 2.
   (b) l'image de 3 par la fonction numéro 1.

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $[-3; 4]$. Ci-contre, on donne $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.
Déterminer graphiquement :



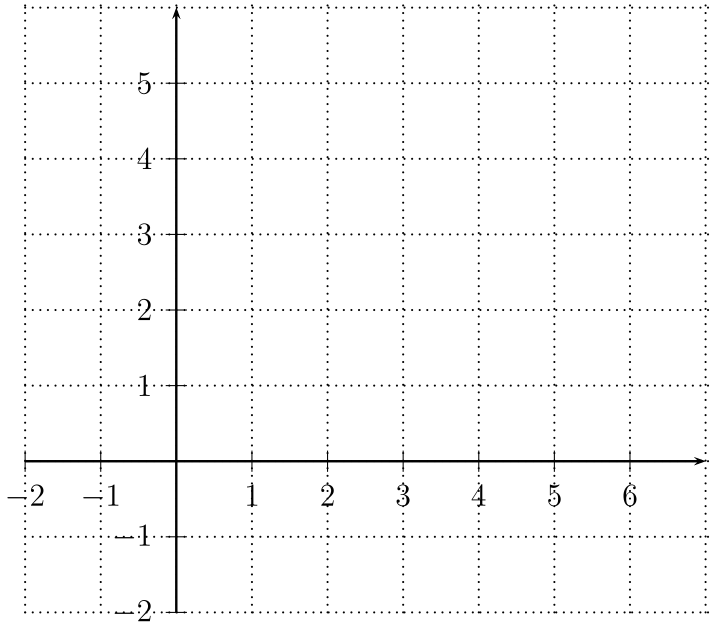
1. Si f est paire, impaire ou bien ni paire-ni impaire
2. la valeur de $f(0)$
3. les images de 3, de 4 et de-1 par f
4. les éventuels antécédents de -4, de 10 et de -6 par f
5. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4
6. les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 3$

Exercice 9

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentant une fonction f définie sur $[-1; 6]$ vérifiant les contraintes suivantes :

- $f(-1) = 3$;
- l'image de 3 par f est 1;
- 2 est un antécédent de -1 par f;
- 5 est une solution de l'équation $f(x) = 6$;
- l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

1. Traduire chacune des cinq informations données sur f par une information sur $\mathcal{C}_f$.
2. Donner une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}_f$.



4 Les variations d'une fonction

Soit f une fonction et soit un **intervalle** $I \subset \mathcal{D}_f$ (c'est à dire $f(x)$ existe pour tout $x \in I$).
La fonction f est dite

- **croissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$

  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe monte

- **décroissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$

  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe descend

- **strictement croissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$

  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe monte sans stagner

- **strictement décroissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$

  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe descend sans stagner

- **constante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$

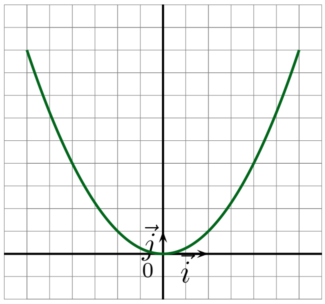
  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Il est possible que la fonction f ne soit ni croissante ni décroissante sur I : elle peut être croissante sur un sous-intervalle de I et puis décroissante ou bien encore des situations plus compliquées ...
Par exemple : la fonction $f(x) = x^2$ est

- f est croissante sur $[0, 3]$;
- f est décroissante sur $[-3, 0]$;
- f n'est ni croissante ni décroissante sur $[-3, 3]$.

Afin de résumer les informations sur les variations de $f(x) = x^2$ (croissance/décroissance) sur $[-3, 3]$, il est commode d'utiliser un tableau de variation:

x	-3		0		3
variations de f	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	9



Un tableau de variations se construit comme un tableau de signe :

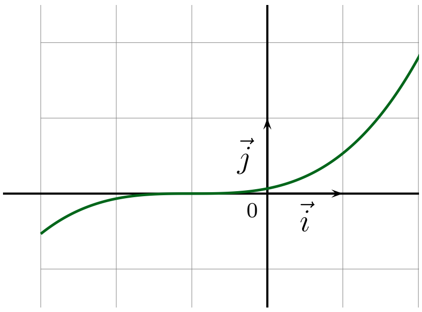
1. on découpe le domaine de définition de la fonction en intervalles (les plus grands possible) tel que la fonction soit croissante ou bien décroissante sur chacun des intervalles ;

2. quand elle croit on met une flèche montante et quand elle décroit une flèche descendante.

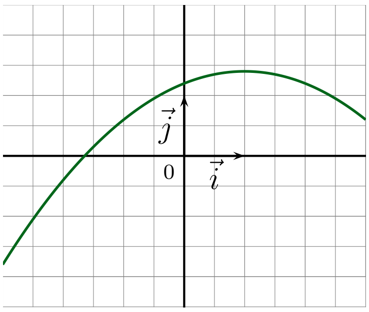
Monotonie. Lorsque f est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur un intervalle, on dit que f est **monotone** sur l'intervalle.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ est monotone sur $\mathbb{R}^+$ et est monotone sur $\mathbb{R}^-$ mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

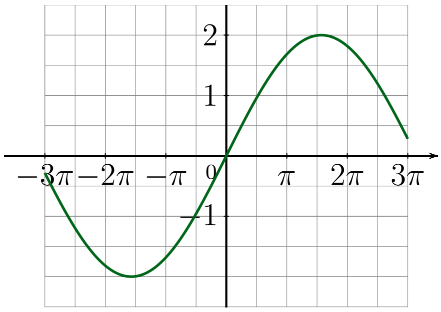
Exercice 10 À l'aide de la représentation graphique, établir *au mieux* le tableau de variation des fonctions suivantes



Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$

5 Fonctions usuelles

5.1 Les fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels. Le nombre a est le *coefficient directeur* et le nombre b est *l'ordonnée à l'origine*.

Remarque. Dans le cas où $b = 0$, f est une *fonction linéaire* ; dans ce cas f représente une situation de **proportionnalité**.

Sens de variation
Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

1. Si $a = 0$, alors f est constante ;
2. Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
3. Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On peut résumer les variations de f dans un tableau de variation :

$a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	

$a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	

5.2 Caractérisation des fonctions affines

Théorème. f est une fonction affine si et seulement si pour tous réels x_1 et x_2, le taux d'accroissement

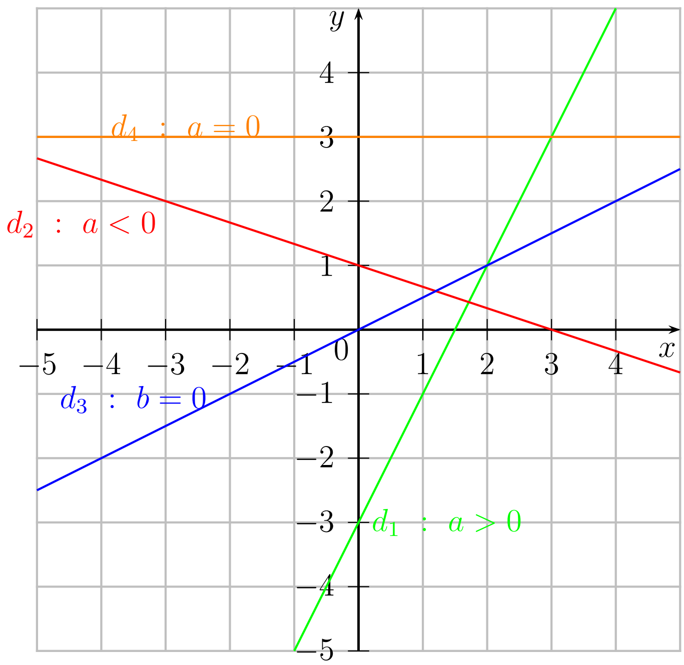
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ ne dépend pas de } x_1, x_2$$

Plus précisément, si $f(x) = ax + b$ alors $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

5.3 Représentation graphique

On a tracé ci-contre la représentation graphique des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x - 3 \\ f_2(x) &= -\frac{1}{3}x + 1 \\ f_3(x) &= \frac{1}{2}x \\ f_4(x) &= 3 \end{aligned}$$



5.4 Détermination d'une fonction affine

Déterminer la fonction affine f telle que $f(4) = 10$ et $f(-3) = -4$.
f est une fonction affine, il existe donc deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ pour tout x.

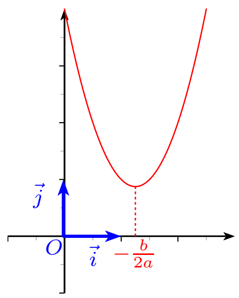
$$a = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = 2$$

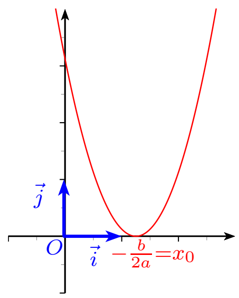
Donc $f(x) = 2x + b$. De plus $f(4) = 10$ donc $2 \times 4 + b = 10$ d'où $b = 10 - 8 = 2$. On a alors $f(x) = 2x + 2$.

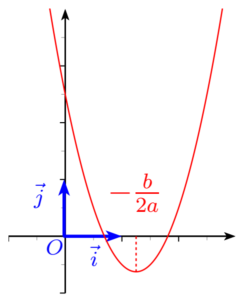
Exercice 11 Déterminer la fonction affine f telle que

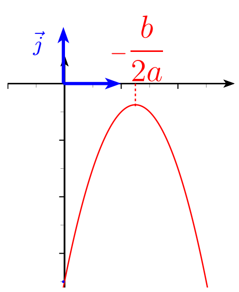
1. $f(1) = 3$ et $f(7) = 14$
2. $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$
3. $f(-8) = 8$ et $f(8) = -8$
4. $f(2) = 5$ et $f(18) = 5$
5. $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$
6. $f(-3) = 2$ et $f(1) = -6$

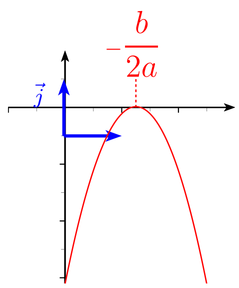
5.5 le trinôme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

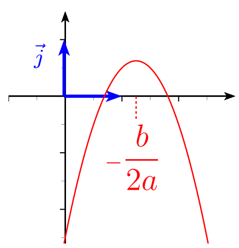
<table>
<tr><th></th><th>$\Delta < 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta > 0$</th></tr>
<tr><td>Racine(s) réelle(s) de P ?</td><td>Pas de racine réelle</td><td>Une seule racine réelle
$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$</td><td>Deux racines réelles distinctes
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $P(x)$?</td><td>Pas de factorisation</td><td>$P(x) = a(x - x_0)^2$</td><td>$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de P et signe de $P(x)$ lorsque $a > 0$
=Parabole avec la concavité en bas</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$ 0 $+$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$+$ 0 $-$ 0 $+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de P et signe de $P(x)$ lorsque $a < 0$
= Parabole avec la concavité en haut</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_2 x_1 $+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Et on voit facilement que l'on a les variations suivantes:

Si $a > 0$ alors :

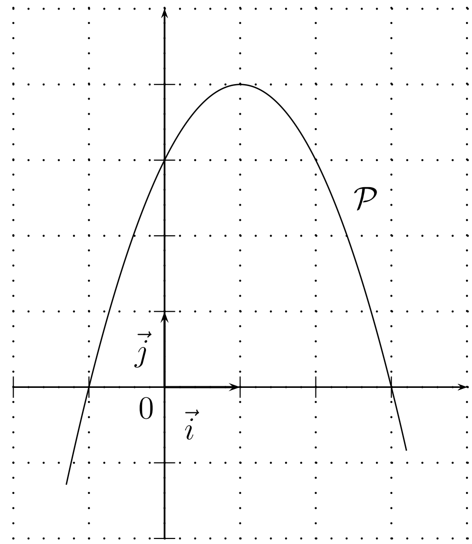
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variations de P	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Si $a < 0$ alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variations de P	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$

Exercice 12 [$\star$]

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ ci-contre.



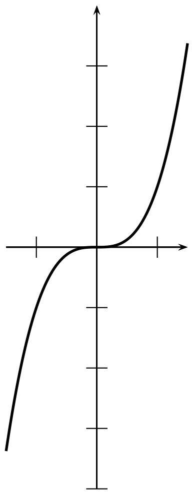
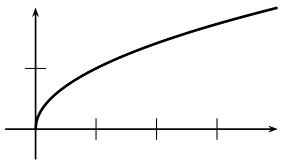
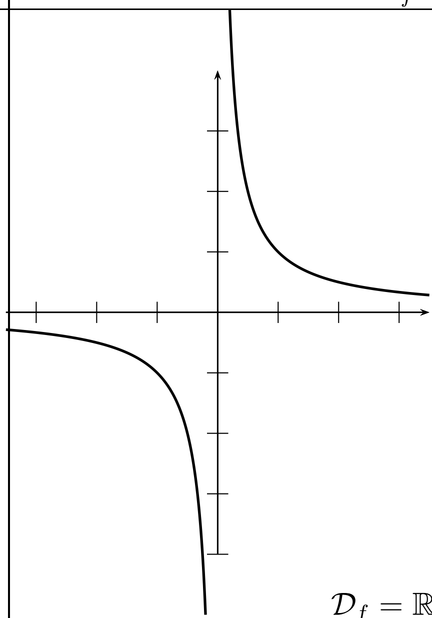
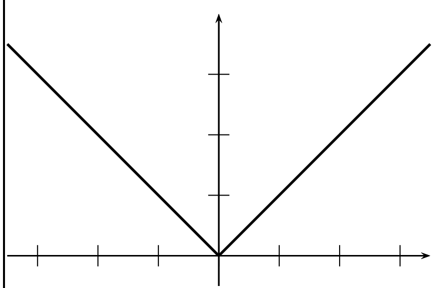
Exercice 13 Pour chacune des conditions suivantes, déterminer **l'unique** fonction polynomiale $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions

1. $P(1) = P(2) = 0$ et $P(3) = 2$
2. $P(1) = P(2) = P(3) = 0$
3. $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3$
4. $P(1) = P(2) = P(3) = 1$
5. 1 est l'unique racine de P et $P(2) = 3$ et $a \neq 0$.

Exercice 14 [$\star$]Soit $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré avec a et c de signes contraires.

1. Démontrer que ce trinôme admet une ou deux racines.
2. On se place dans le cas où le trinôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2.
   (a) Exprimer le produit $x_1 \times x_2$ en fonction de a et de c uniquement.
   (b) Montrer que si a et c sont de signes contraires alors le trinôme admet une racine positive et une racine négative.

5.6 Cube, racine, inverse, valeur absolue

Fonction	Représentation graphique	Variations
cube : $f(x) = x^3$	 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	x: $-\infty$ … $+\infty$; variations de f : $\nearrow$
racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$	x: 0 … $+\infty$; variations de f : $\nearrow$
inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$	 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$	x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$; variations de f : $\searrow$ ‖ $\searrow$
valeur absolue: $f(x) = \lvert x \rvert$	 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$	x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$; variations de f : $\searrow$ $\nearrow$