Fiche 6
Vecteurs et repérage dans le plan

Dans cette fiche tout ce que l'on va dire se situe dans le plan $\mathcal{P}$, *i.e.*, tout ce que vous pouvez tracer sur une feuille de papier (infiniment grande). On travaille donc dans un environnement avec 2 dimensions ! Bien entendu on peut généraliser cela pour travailler dans le monde qui nous entoure qui est en 3 dimensions ... Et même bien plus ...

1 Les vecteurs. Généralités

1.1 Un vecteur ?

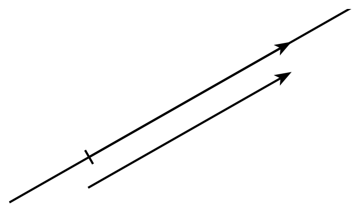
Un vecteur est un objet mathématique qui représente un déplacement : aller d'un endroit à un autre endroit.

Ce déplacement est caractérisé uniquement par le départ et l'arrivée : on ne tient pas compte du chemin emprunté.

On peut nommer les vecteurs par des lettres de l'alphabet (généralement i, j, u, v, w) surmonter d'une flèche : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ... Ou bien à l'aide de deux lettres : le départ et l'arrivée. Par exemple si A et B sont deux points, le vecteur représentant le déplacement de A vers B (A est l'origine et B l'arrivée) est noté $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi un vecteur est entièrement déterminé par trois données

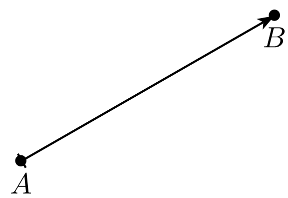
- **Direction.** Suivre un axe/une droite ;
- **Sens.** Un sens de parcourt de la direction ;
- **Longueur.** La longueur de parcourt de la direction dans le sens donné.



Le mot savant pour la longueur d'un vecteur est le mot *norme*. La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

Par exemple si le point A correspond à la position de Lyon sur une carte de la France et B la position de Créteil sur la même carte, il est clair que le trajet pour aller de Lyon à Créteil définit un vecteur :

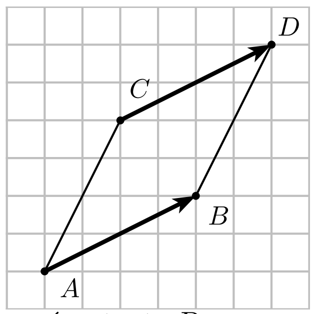
Une direction. l'axe Lyon/Créteil qui est exactement le même que l'axe Créteil/Lyon (cette direction est donnée par la droite (AB)) ;
Un sens. de Lyon vers Créteil ;
Une norme. la distance à vol d'oiseau entre Lyon et Créteil.
Dans ce cas on parle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



1.2 Définitions et notations en vrac.

Egalité entre deux vecteurs. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux **si et seulement** si ils ont même direction, même sens et même norme. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ alors on a le résultat fondamental suivant :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** $ABDC$ est un parallélogramme.



Ce résultat permet de mettre en évidence qu'un vecteur admet une infinité de *représentants*. Par exemple dans le schéma ci-dessus les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux représentants d'un même vecteur car ils correspondent au même déplacement : *se déplacer de* 4 *carreaux sur la droite puis monter de* 2 *carreaux.*

Le vecteur nul. Si on veut pouvoir décrire tous les déplacements il est naturel de pouvoir décrire le déplacement qui consiste à ne pas bouger. Ce déplacement correspond au *vecteur nul.* Ce vecteur est souvent noté par un zéro surmonté d'une flèche : $\vec{0}$.

Il n'est pas difficile de voir que le seul vecteur dont la norme est nulle est le vecteur nul : *Si un vecteur* $\vec{u}$ *est tel que* $\|\vec{u}\| = 0$ *alors* $\vec{u} = \vec{0}$. Réciproquement il est clair que $\|\vec{0}\| = 0$.

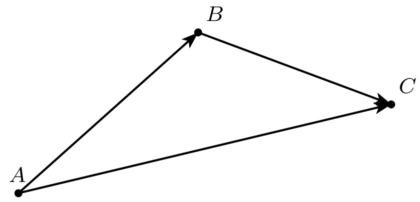
D'autre part le vecteur nul n'a pas de direction et donc pas de sens. C'est le seul vecteur qui n'a pas de direction et pas de sens.

Addition entre vecteurs. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs alors on peut définir le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ comme étant le déplacement de $\vec{u}$ suivi de celui de $\vec{v}$ (ou bien le contraire, l'ordre ne change rien).

Un résultat fondamental concernant l'addition entre vecteur est **la relation de Chasles** :

Étant donnés trois points quelconques du plan A, B et C, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.}$$



Vecteurs opposés. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. Il n'est pas difficile de voir que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même norme mais ont leurs sens qui sont opposés. Dans ce cas on note $\vec{u} = -\vec{v}$.

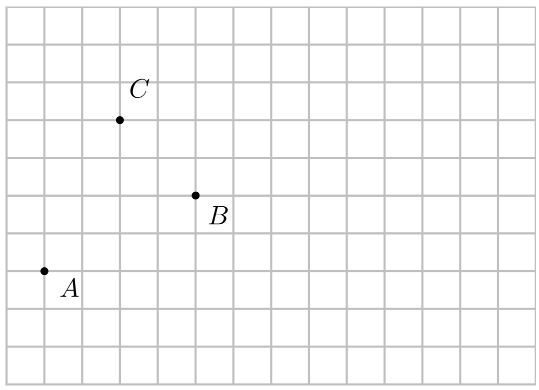
Soient A et B deux points du plan. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Si $t \in \mathbb{R}$ est un nombre réel et $\vec{u}$ est un vecteur, alors $t\vec{u}$ correspond au déplacement de $\vec{u}$ fait "t fois" avec la règle que si t est négatif alors on change de sens de parcourt. Plus précisément on peut résumer les trois caractéristiques de $t\vec{u}$ dans le tableau suivant :

$\vec{u} = \vec{0}$ ou $t = 0$	$\vec{u} \neq \vec{0}$ et $t > 0$	$\vec{u} \neq \vec{0}$ et $t < 0$
$t\vec{u} = \vec{0}$	$t\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même sens et même direction $\|t\vec{u}\| = t\|\vec{u}\|$	$t\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction et sont de sens **contraire** $\|t\vec{u}\| = \lvert t\rvert\|\vec{u}\|$

Exercice 1 Soit A, B, C trois points tracés ci-contre

1. Placer le point D vérifiant $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Placer le point E vérifiant $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
3. Placer le point F vérifiant $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB}$.
4. Placer le point G vérifiant $\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC}$.



1.3 Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = t\vec{v}$ ou $\vec{v} = t\vec{u}$.

Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur car pour tout vecteur $\vec{u}$ on a $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$.

La notion de colinéarité s'interprète facilement de manière géométrique par l'assertion suivante :

Deux vecteurs **non nul** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires **si et seulement si** ils ont même direction.

Cette assertion permet de démontrer facilement le fait suivant :

Trois points A, B, C sont alignés **si et seulement si** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 2 Soit ABC un triangle. Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. Justifier le fait que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3. Que peut-on dire pour les droites (IJ) et (BC) ?

Exercice 3 Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{FE}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.
4. En déduire que $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires.
5. Que peut-on dire des points B, F et E ?

2 Le repérage dans le plan

2.1 Bases et coordonnées d'un vecteur

Il est très intéressant d'avoir deux vecteurs non colinéaires car ces deux vecteurs permettent de **décomposer de manière unique** n'importe quel vecteur comme *combinaison linéaire* de ces deux vecteurs.

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires alors pour tout vecteur $\vec{u}$
il existe deux nombres réels x, y qui sont uniques tel que $u = x\vec{i} + y\vec{j}$.

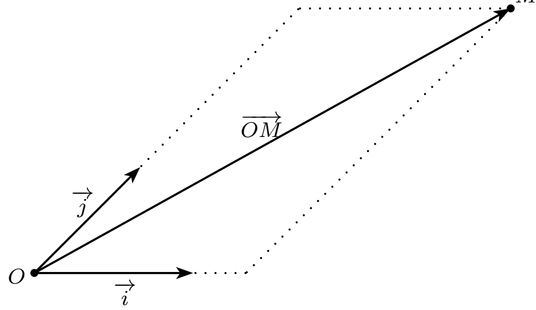
On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ forme une **base** du plan. Et si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ on dit que $(x; y)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Il n'est pas difficile de montrer que si on se fixe une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan et

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$
alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$ et si $t \in \mathbb{R}$ alors $t\vec{u}$ a pour coordonnées $(tx; ty)$

2.2 Repère du plan

Soit O un point du plan et soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
Pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime de manière unique en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Puisque le point O est fixé, il sert d'*origine* afin de repérer n'importe quel point M par le déplacement nécessaire en partant de O afin d'arriver à M. Ce déplacement est exactement le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On dit alors que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ forme un repère du plan.



Une fois que l'on s'est donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point M est uniquement *repéré* par ses *coordonnées* $(x; y)$ où $x, y \in \mathbb{R}$:

$\rightarrow$ On considère le déplacement de O à M, c'est à dire, le vecteur $\overrightarrow{OM}$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique en *un multiple de* $\vec{i}$ **plus** *un multiple de* $\vec{j}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\rightsquigarrow$ le couple $(x; y)$ s'appelle les **coordonnées** de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, x désigne l'**abscisse** de M et y l'**ordonnée** de M ; on note souvent $M(x; y)$.

$\rightsquigarrow$ Les axes d'un repère sont les droites passant par l'origine du repère et dont les directions sont données par les vecteurs du repère.
L'axe dont la direction est donnée par $\vec{i}$ s'appelle l'*axe des abscisses* (et est souvent noté (Ox)) et l'axe dont la direction est donnée par $\vec{j}$ est l'*axe des ordonnées* (et est souvent noté (Oy)).

Un repère du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est dit

— **orthogonal** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ont des directions perpendiculaires (on dit alors que ces vecteurs sont orthogonaux).

— **orthonormal** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux et de même norme.

2.3 Coordonnées d'un vecteur et du milieu d'un segment

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

> Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_{\overrightarrow{AB}}; y_{\overrightarrow{AB}}) = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Il faut remarquer que les coordonnées que l'on obtient de la sorte pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les mêmes que celles obtenues précédemment en décomposant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}}\vec{i} + y_{\overrightarrow{AB}}\vec{j}$.

> Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$.

On peut démontrer le résultat suivant concernant le colinéarité de deux vecteurs :

> Les vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x', y') sont colinéaires
> si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $A(7; 3)$, $B(10; 8)$ et les points C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire celles du vecteur $\overrightarrow{DC}$.
3. Si D a pour coordonnées $(8; 7)$ quelles sont les coordonnées de C ?

Exercice 5 Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(2; -3)$, $B(5; 6)$, $C(-3; 1)$ et $D(-5; 14)$. On reportera les données de l'énoncé dans le repère présent en fin de chapitre.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
3. Même question pour $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[BC]$.
5. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ}$.
6. Soit $M(x; 0)$ un point de l'axe des abscisses. Déterminer toutes les abscisses possibles de M telles que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IM}$ soient colinéaires.

2.4 Calculs dans un repère orthonormé

Durant toute l'année de DAEU (et surement au delà) nous travailleront exclusivement dans des repères orthogonaux. Et quasi-exclusivement dans des repères orthonormés.

Lorsque l'on a en face de nous un repère orthogonal, alors il est commode de représenter un axe à l'horizontale et l'autre à la verticale. L'axe horizontal sera celui dont la direction est donnée par $\vec{i}$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on peut calculer la distance AB entre deux points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ par la formule suivante :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

On peut remarquer que cette distance correspond aussi à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Plus précisément, si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ alors sa norme est :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}}$$

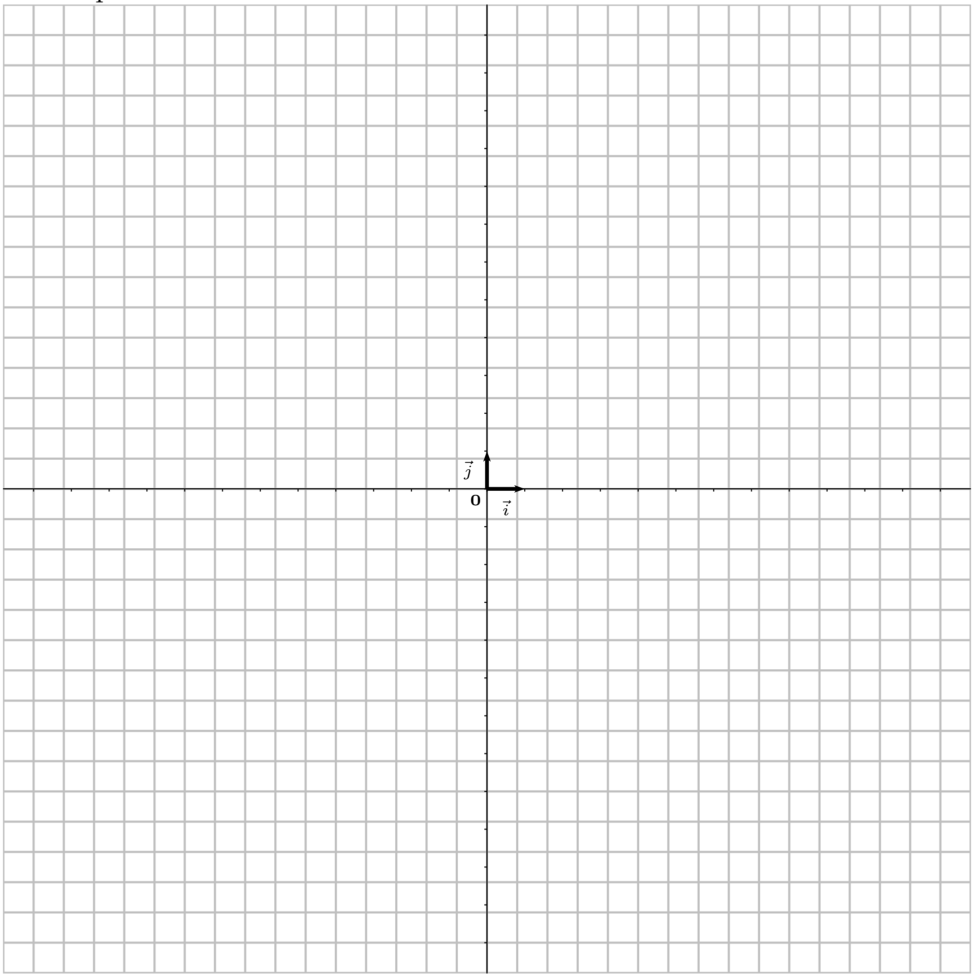
Exercice 6 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On reportera les données de l'énoncé dans le repère présent en fin de chapitre.

1. Placer les points $A(4; 5)$, $B(0; -3)$ et $C(-6; 0)$.
2. (a) Calculer AB, AC et BC.
   (b) En déduire que ABC est un triangle rectangle. Préciser où se trouve l'angle droit.
3. (a) Soit D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle. *Indication. On rappelle qu'un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.*
   (b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Déterminer les coordonnées du points D.
4. Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$.

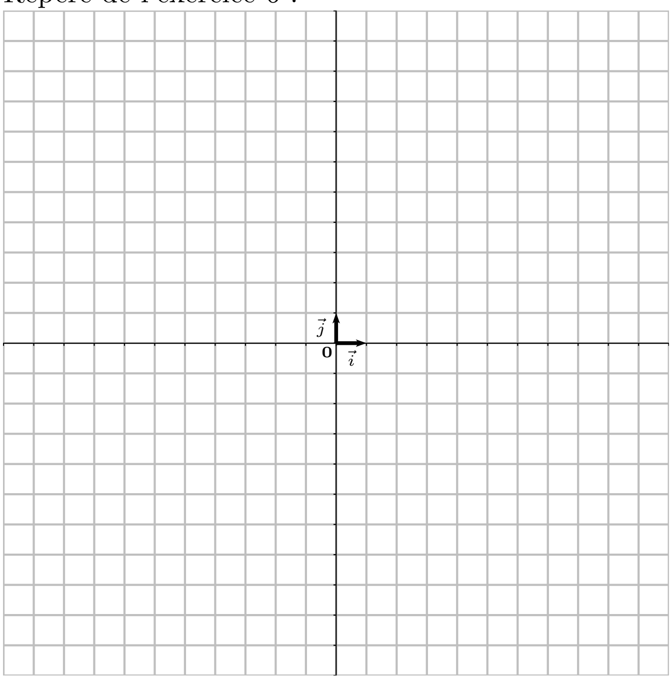
Exercice 7 On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les points $A(-1; 2)$, $B(3; 3)$, $C(0; 6)$, $D(-5; 4)$ et $E(-3; -2)$. On reportera les données de l'énoncé dans le repère présent en fin de chapitre.

1. Placer les points A, B, C, D et E.
2. Tracer le segment $[CE]$. A est-il le milieu de $[CE]$?
3. Tracer le triangle ABC. Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet A. Est-il équilatéral ?
4. Tracer le triangle ADE. Le triangle ADE est-il isocèle ? rectangle ?

Repère de l'exercice 5 :



Repère de l'exercice 6 :



Repère de l'exercice 7 :