Fiche 9 : Fonctions II. Limites

Dans la fiche 7 "Fonctions I", on a vu ce qu'est une *fonction* et différentes notions afférentes.
En particulier, on a travaillé sur

- le domaine de définition d'une fonction ;
- la représentation graphique d'une fonction.

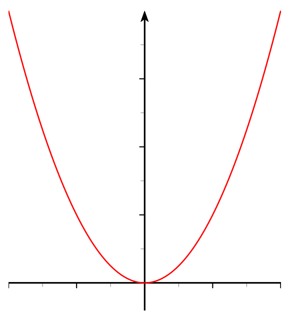
Dans cette fiche on va approfondir ces notions en se donnant des moyens calculatoires permettant de comprendre :

- ce qui se passe dans certain cas quand on se rapproche du bord de domaine de définition d'une fonction ;
- comment ajouter des *droites remarquables* à une courbe (représentant une fonction) permettant de donner des informations très intéressantes sur la courbe et sur la fonction.

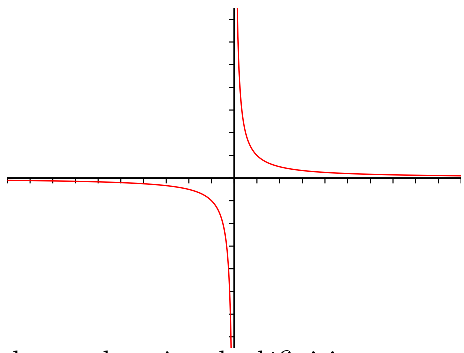
1 Introduction informelle au comportement asymptotique d'une fonction

Lorsque l'on se donne une fonction f (par exemple la fonction *carré* $f(x) = x^2$ ou bien la fonction *inverse* $g(x) = \dfrac{1}{x}$), on cherche dans un premier temps son domaine de définition.

La fonction *carré*



La fonction *inverse*



Une question naturelle est de savoir ce qui se passe sur le *bord* de son domaine de définition :

- Pour la fonction *carré*, le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Que se passe-t-il pour des grandes valeurs de x (on dit au voisinage de $+\infty$) ; de même que se passe-t-il pour des valeurs *très négatives*[1] *de* x (on dit au voisinage de $-\infty$) ?
- Pour la fonction *inverse*, le domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Que se passe-t-il au voisinage de $+\infty$ ou bien $-\infty$, mais aussi pour des valeurs de x *proche* de 0 (on dit au voisinage de 0).

Ce type de questions portent sur ce que l'on appelle en mathématique (et en sciences en général) le *comportement asymptotique* d'une fonction.

La fonction *carré*
Il est assez facile de voir que pour la fonction *carré* ($f(x) = x^2$), plus x est grand et plus x^2 va l'être ... Plus précisément on peut rendre x^2 *aussi grand que l'on désire* tant que x est *suffisamment grand.*

→ On dit alors que $f(x)$ **tend** vers $+\infty$ quand x **tend** vers $+\infty$.

Par exemple, il est clair que pour des valeurs positives de x, on peut voir $f(x) = x^2$ comme la *surface* d'un carré de coté de *longueur* x. Et il est évident qu'un tel carré peut avoir une surface aussi grande que l'on veut pourvu que sa longueur de coté soit suffisamment grande. Si on veut une surface $f(x)$ supérieur à $1000000 = 10^6$, il suffit d'avoir un coté de longueur supérieur à $1000 = 10^3$.

Puisque la fonction f est paire ($f(-x) = f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$), alors la connaissance de son *comportement asymptotique* en $-\infty$ est facilement obtenue à partir de celui en $+\infty$ ...

1. Des valeurs *très négatives* de x signifie x négatif et $|x|$ grand

La fonction *inverse*

Pour la fonction *inverse*, si x est grand alors $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est proche de 0 ... Plus précisément, on peut rendre $\dfrac{1}{x}$ *aussi proche* de 0 que l'on désire pourvu que x soit *suffisamment grand*.

$\rightarrow$ On dit alors que $g(x)$ **tend** vers 0 quand x **tend** vers $+\infty$.

En effet on peut voir $g(x)$ comme étant la fraction d'un gâteau partagé équitablement par x personnes (au moins pour les valeurs positives et entières de x !). Si le nombre de personne est très grand, alors chacune des parts représente une fraction du gâteau de plus en plus proche de 0 (chaque part tend à avoir une taille nulle).

Par contre en 0^+ (c'est à dire x est strictement positif et est proche de 0) on a un phénomène d'explosion : si $x > 0$ est très proche de 0 alors $\dfrac{1}{x}$ est très grand.

$\rightarrow$ On dit alors que que $g(x)$ **tend** vers $+\infty$ quand x **tend** vers 0^+.

Par exemple, pour illustrer ce fait on peut voir $\dfrac{1}{x}$ comme la vitesse moyenne nécessaire pour parcourir 1 km en x heure (avec $x > 0$). Si x est très petit (proche de 0) alors la vitesse doit nécessairement être grande.

2 Limite "en" $+\infty$ ($x \to +\infty$) ou "en" $-\infty$ ($x \to -\infty$)

2.1 Limite finie "en" $+\infty$ ($x \to +\infty$) ou "en" $-\infty$ ($x \to -\infty$)

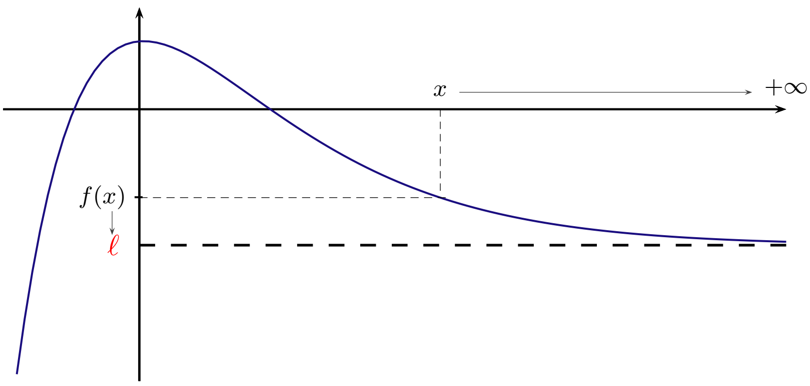
2.1.1 Définition

Dans cette section, on regarde ce qui se passe pour des grandes valeurs de x (resp. pour des valeurs très négatives de x).

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, où A est un réel.

> Dire que "la fonction f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très grand, on a $f(x)$ très proche de ℓ.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

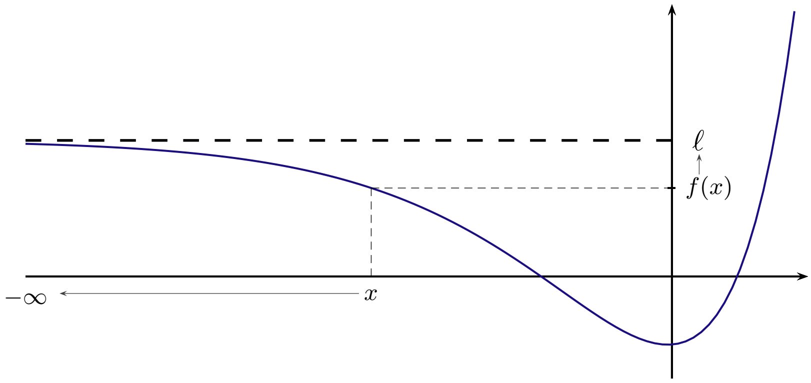


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition que x soit suffisamment grand.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A]$, où A est un réel.

> Dire que "la fonction f a pour limite le réel ℓ en $-\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très négatif on a $f(x)$ très proche de ℓ.

On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition que x soit suffisamment négatif.

2.1.2 Interprétation graphique d'une limite finie : asymptote horizontale

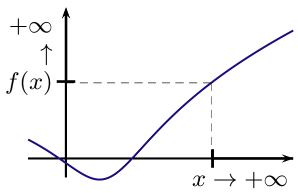
Si "en $+\infty$" ou bien "en $-\infty$", f admet une limite finie ℓ, alors la courbe vient "s'aplatir" sur la droite d'équation $y=\ell$:

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), on dit que la droite d'équation $y=\ell$ est une *asymptote horizontale* de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).

Remarque. Sur les deux précédents graphiques, l'asymptote est tracée en "gros tirets".

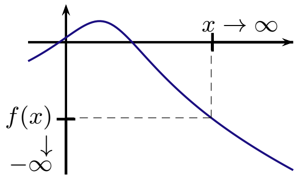
2.2 Limite infinie "en" $+\infty$ ($x\to+\infty$) ou "en" $-\infty$ ($x\to-\infty$)

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un réel.



> Dire que "la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très grand, on a $f(x)$ très grand.

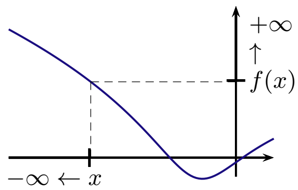
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



> Dire que "la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très grand, on a $f(x)$ très négatif.

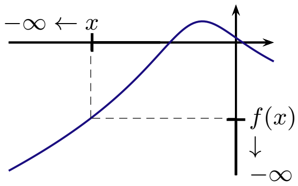
On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où A est un réel.



> Dire que "la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très négatif, on a $f(x)$ très grand.

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



> Dire que "la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$" signifie *intuitivement* que pour x très négatif, on a $f(x)$ très négatif.

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 1

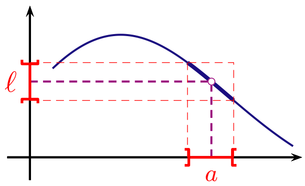
1. Determiner la limite de $f(x) = x$ quand $x \to +\infty$,
2. Determiner la limite de $f(x) = x^2$ quand $x \to -\infty$.
3. Determiner la limite de $f(x) = x^3$ quand $x \to +\infty$,
4. Determiner la limite de $f(x) = x^3$ quand $x \to -\infty$.

3 Limite en un réel

3.1 Limite finie d'une fonction en un réel

Limite

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a, *i.e.* f est définie dans un ensemble de la forme $]a-h, a[\cup]a, a+h[$ avec $h > 0$.



> Dire que la fonction f *a pour limite* le réel ℓ en a signifie *intuitivement* que si x est très proche de a, alors $f(x)$ est très proche de ℓ.
> On dit aussi $f(x)$ *tend vers* ℓ lorsque x *tend vers* a

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Dans le cas où la fonction f est un polynôme, *i.e.* $f(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$, on a un résultat moralement simple qui dit que la limite de f en un point $a \in \mathbb{R}$ est $f(a)$.

Proposition. Si f est un polynôme, *i.e.* $f(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$, alors pour $a \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

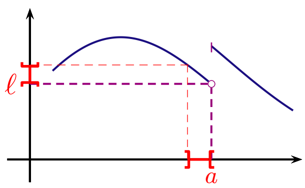
Ce résultat se démontre assez facilement en utilisant les résultat la section 5. Et de manière générale cette propriété caractérise une famille beaucoup plus large de fonction que l'ensemble des polynômes (voir Section 8.1, page 10).

Limite latérales

Il est possible que la fonction f n'admette pas de limite en a bien que f soit définie dans un voisinage de a.
Cela se passe quand pour des valeurs de x *proche* de a, la fonction f ne se *stabilise* pas vers **une unique** valeur. Un cas typique d'une telle situation est lorsque la fonction f représente un phénomène, qui pour des valeurs x autour du nombre a, présente un changement brusque de l'image $f(x)$; la fonction f est discontinue (voir Section 8, page 9)

Il est alors intéressant de considérer les *limites latérales* de f en a : *limite à droite* et *limite à gauche* [lorsque elles existent].

Soit f une fonction définie dans un intervalle de la forme $]a, a+h[$ (resp. $]a-h, a[$) avec $h > 0$.



> Dire que la fonction f a pour *limite à droite* (resp. *limite à gauche*) le réel ℓ en a signifie *intuitivement* que si $x > a$ (resp. $x < a$) est très proche de a alors $f(x)$ sera très proche de ℓ.

On note : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$)

Remarque. Si une fonction f admet en un point a une limite à gauche et une limite à droite qui sont égales, alors f admet une limite en a.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer la limite de f en 2.

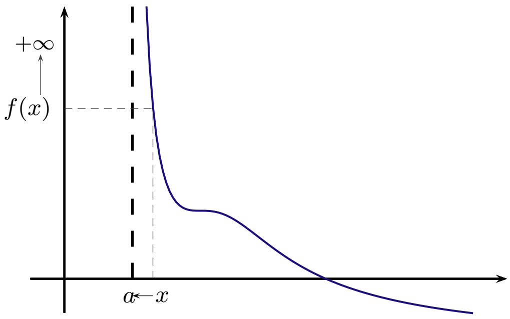
2. Déterminer la limite de f en -3.
3. Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 0.
4. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

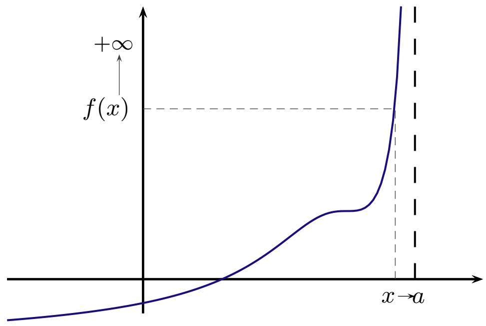
3.2 Limite infinie d'une fonction en un réel : phénomène d'explosion

Soit f une fonction définie au *voisinage* d'un réel a à droite de a (resp. à gauche de a), c'est à dire définie dans un intervalle de la forme $]a, a+h[$ (resp. $]a-h; a[$) avec $h > 0$.

> Dire que *la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par la droite (*resp. *par la gauche)* signifie *intuitivement* que si $x > a$ (resp. $x < a$) est suffisamment proche de a alors $f(x)$ est arbitrairement grand.
> On dit aussi que f tend vers $+\infty$ en a^+ (resp. a^-).

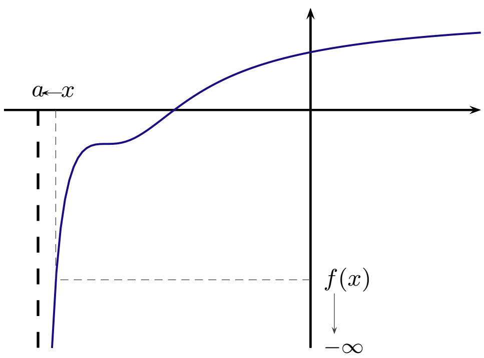
On note : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$)

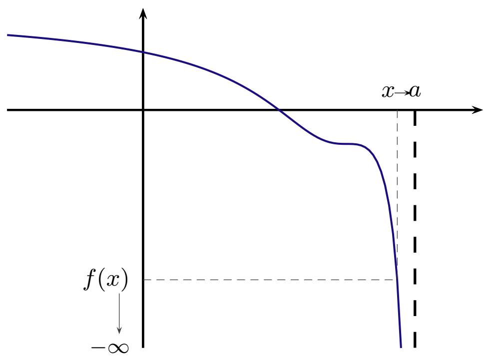




$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$

On a des définitions analogues lorsque la limite de f en a est $-\infty$

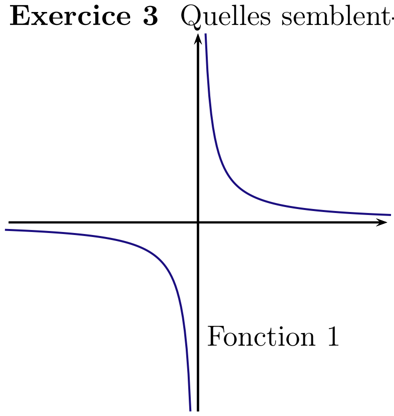




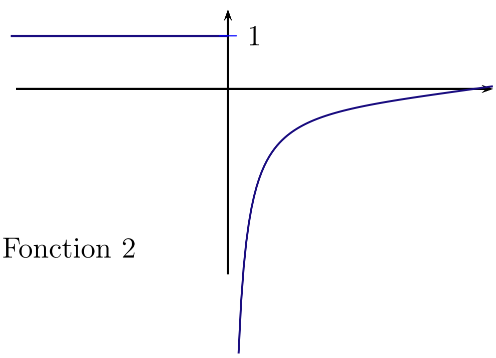
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$

Autrement dit, $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$) signifie que $f(x)$ est aussi *grand* (resp. *négatif*) que l'on veut pourvu que x soit *suffisamment proche* de a par la gauche (si a^-) ou par la droite (si a^+).

Exercice 3 Quelles semblent-être les limites en 0^- et en 0^+ pour chacune des deux fonctions suivantes :



Fonction 1



Fonction 2

3.3 Interprétation graphique d'une limite infinie : asymptote verticale

Si on a un phénomène d'explosion en un point a à gauche ou bien à droite, c'est à dire :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ (explosion à droite) ou bien } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ (explosion à gauche),}$$

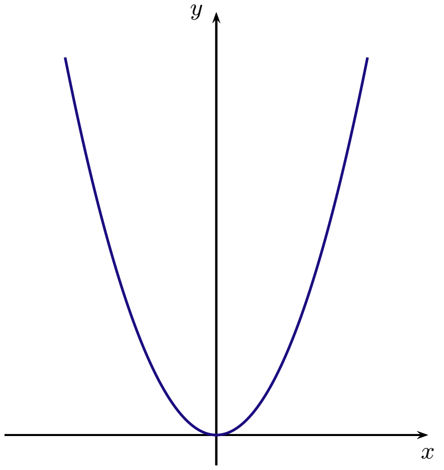
on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* de la courbe représentative de la fonction f.

Cela s'interprète graphiquement par le fait que la courbe représentative de la fonction f "s'agglutine" sur la droite $x = a$ quand x est proche de a.

Remarque. Sur les quatre graphiques de la section 3.2, les asymptotes sont tracées en "gros tirets".

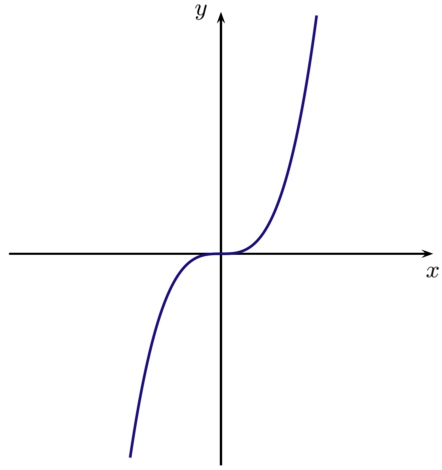
4 Limites de fonctions usuelles

fonction carré



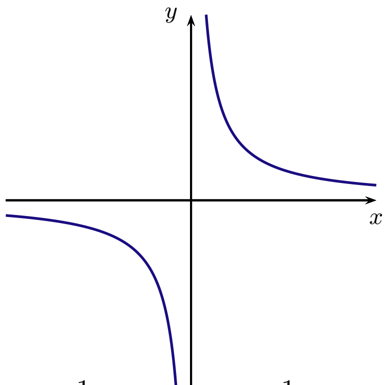
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

fonction cube



$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

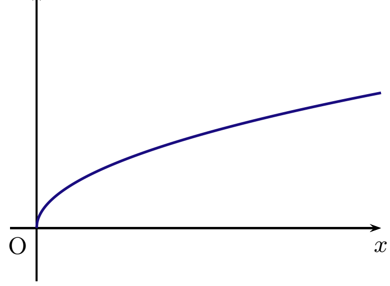
fonction inverse



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

fonction racine carrée



$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Les fonctions "puissance" : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

5 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section, u et v désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels, et α désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.

5.1 Limite d'une somme de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (u+v)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**forme indéterminée**

5.2 Limite d'un produit de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (u\times v)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty^{(*)}$	**forme indéterminée**	$\pm\infty^{(*)}$

(*) On applique tout simplement la règle des signes.

5.3 Limite d'un quotient de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	$0^{\pm}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'^{\,(**)}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{u}{v}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty^{(*)}$	0	$\pm\infty^{(*)}$	**forme indéterminée**	**forme indéterminée**

(*) On applique tout simplement la règle des signes.

(**) Si $l' = 0$ alors il faut que v garde un signe constant proche de α.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+5}{x-2}\right) \qquad \lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-5x+3}{x+1}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{7x^2+3x+8}{\frac{1}{x}+1}\right)$$

Exercice 5 Calculer les limites suivantes et préciser l'existence d'éventuelles asymptotes.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\left(\frac{2x-10}{x-3}\right) \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{3x^4-5x+8}{x^2-4}\right)$$

Exercice 6 $\star$ Calculer les limites suivantes et préciser l'existence d'éventuelles asymptotes.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+4}\right) \qquad \lim_{\substack{x\to -5\\ x>-5}}\left(\frac{2x^2+20x+50}{x+5}\right) \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\right)$$

6 Formes indéterminées dont on lève (très) facilement l'ambigüité

6.1 Les polynômes

Les polynômes sont les fonctions de la forme $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. Si $a_n \neq 0$, alors, on dit que :

- n est le degré du polynôme P,
- $a_n x^n$ est le monôme de plus haut degré.

Par exemple, le polynôme $P(x) = -x^3 + 5x - 3$ est de degré 3 et son monôme de plus haut degré est $-x^3$.

Si on s'intéresse à la limite de P en $+\infty$, on se trouve face à une forme indéterminée [du type "$\infty - \infty$"] : $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x+3 = +\infty$.

En fait, l'indétermination est facile à lever grâce au théorème suivant :

Théorème. Le théorème du monôme de plus haut degré

Soit $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.

Alors on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$

c'est à dire

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.

6.2 Les fractions rationnelles

Un autre type de fonctions couramment utilisées sont les fractions rationnelles. Une fraction rationnelle Q est un quotient de deux polynômes : $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$.

Par exemple $Q(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ est une fraction rationnelle.

Si on s'intéresse à la limite de Q en $+\infty$, on se trouve face à une forme indéterminée $[\infty/\infty]$: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$.

En fait, l'indétermination est facile à lever grâce au théorème suivant :

Théorème. Le théorème du quotient des monômes de plus haut degré

Soit $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$ une fraction rationnelle telle que $a_n, b_m \neq 0$.

Alors on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m},$$

c'est à dire

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est celle du quotient des monômes de plus haut degré.

Exercice 7 Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$ en précisant les éventuelles asymptotes :

$a(x) = 9x^5 - 4x^3 - 8x + 2$

$b(x) = \dfrac{8x^3 - 5x + 2}{-4x^3 + 5}$

$c(x) = \dfrac{9x^2 - 16}{5x^3 + 6x}$

$d(x) = \dfrac{7x^5}{4x^3 - 1}$

Exercice 8

Soit les fonctions f et g définies par
$f(x) = \dfrac{-5x^5 + 3x + 7}{x^2 + 4}$ $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$.

1. Calculer les limites de f et g en ∞ et en $-\infty$.

2. Calculer les limites de f et g en 1.

7 Deux théorèmes de comparaison

Théorème. Le premier théorème de comparaison

Soit α un nombre réel ou bien $\pm\infty$ et soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de α telles que $f \leq g$.

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$,
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$,

Théorème. Le théorème des gendarmes

Soit α un nombre réel ou bien $\pm\infty$ et soit f, g et h trois fonctions définies dans un voisinage de α telles que $f \leq g \leq h$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell$.

Exercice 9 (Asymptote Oblique)

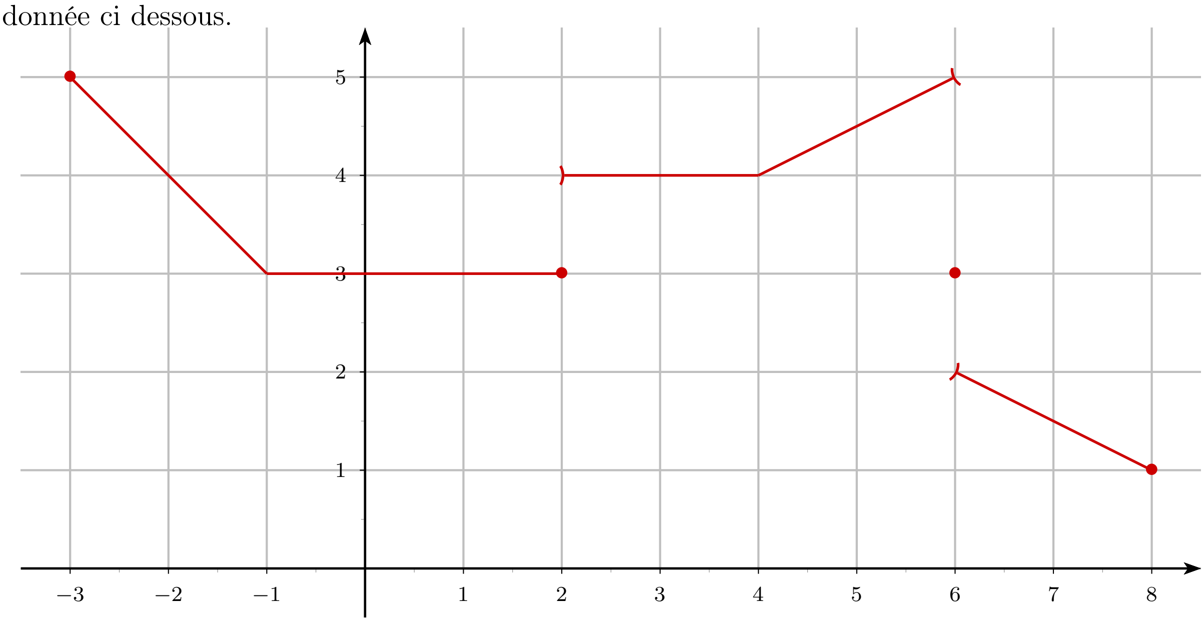
On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$.

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre $x \in]1, +\infty[$, on ait
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$
2. En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation au voisinage de $+\infty$. *C'est à dire que la courbe C se rapproche d'une droite Δ qui n'est ni horizontale ni verticale au voisinage de $+\infty$.*
3. Étudier la position de C par rapport à Δ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. *C'est à dire préciser lorsque C est au-dessus de Δ et le contraire.*
4. Montrer que la courbe C admet une autre asymptote dont on donnera une équation.

8 Fonctions continues et le Théorème des valeurs intermédiaires

Dans cette section on définie une propriété très importante qui est vérifiée par un très grand nombre de fonctions : la continuité.

Exercice 10 On se donne la fonction f définie sur l'intervalle $[-3, 8]$ dont la représentation graphique est donnée ci dessous.



1. Déterminer les images de -3, -2, 0, 2 et 6 par f.
2. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in [-3, 8]$.
3. Par lecture graphique, déterminer

   (a) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x)$

   (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

   (c) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$

   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$

   (e) $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x < 6}} f(x)$

   (f) $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} f(x)$

4. $\star$ Que peut-on dire de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x)$ et de $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x > 8}} f(x)$?

8.1 Fonctions continues : définitions & exemples

Dans toute cette sous-section ("**8.1 Fonctions continues : définitions & exemples**") on travail sur un intervalle quelconque qui contient au moins deux éléments, cette intervalle sera noté I.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *continue* en $x_0 \in I$ lorsque l'on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est à dire
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe
- cette limite vaut $f(x_0)$

On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$.

Cette définition peut sembler bien étrange à première vu ... Par contre une interprétation graphique simple peut-être faite :

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue lorsque l'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le stylo.

Si une fonction n'est pas continue, on dit qu'elle est *discontinue*; moralement on peut visualiser une telle fonction comme présentant des *sauts* (voir le graphe de l'exercice 1 aux points $x = 2$ et $x = 6$).

Exercice 11

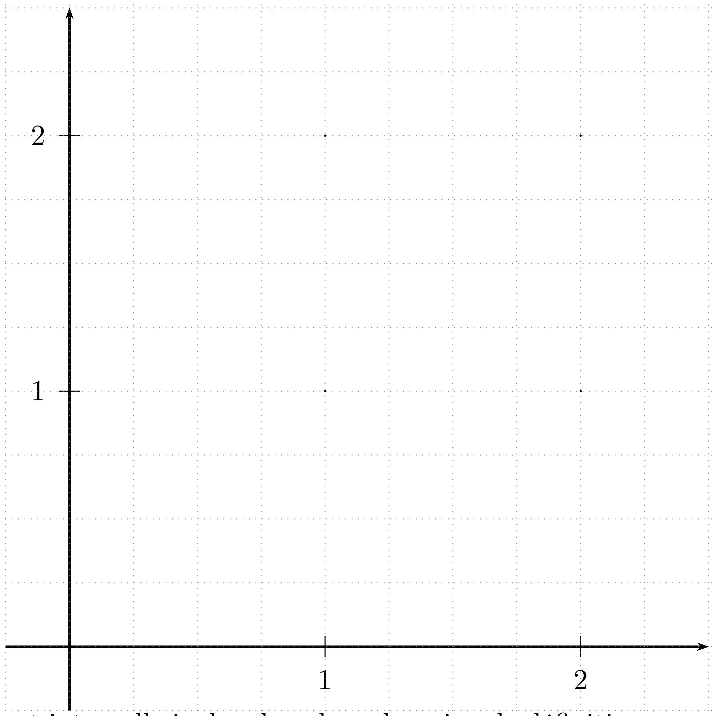
1. Soit

$$\begin{array}{cccl} f: & [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in]1,2] \end{cases} \end{array}.$$

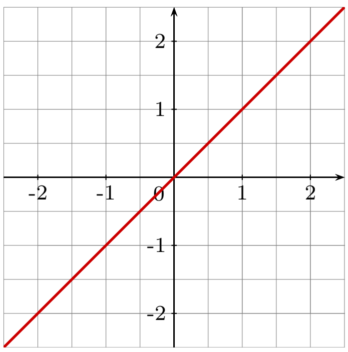
   a. Dans le graphique ci-contre tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0,2]$.

   b. `La continuité par le graphique.`
   En observant la représentation graphique de la fonction f, selon vous, f est-elle continue dans $[0;2]$?

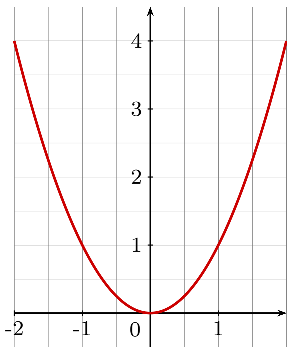
   c. `La continuité par le calcul.`
   Calculer $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$. La fonction f est-elle continue dans $[0,2]$?



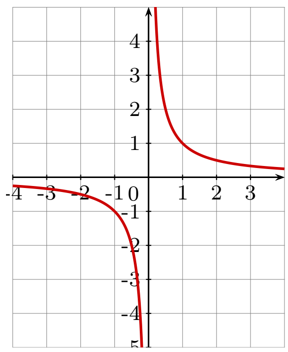
Exemple. Les fonctions usuelles sont **continues** sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition :



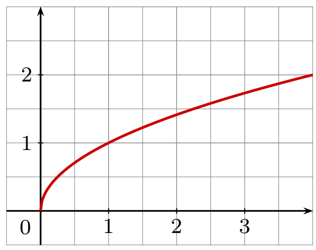
$f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$



$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$



$f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$



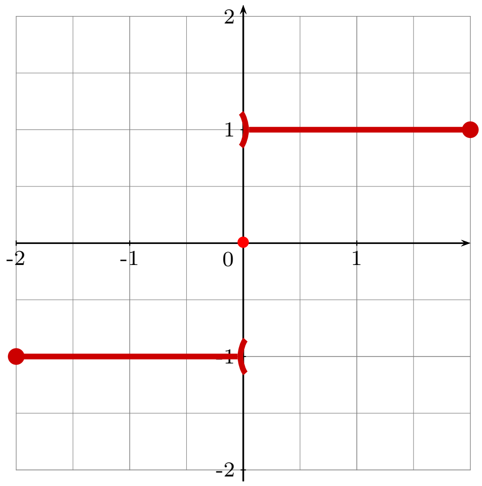
$f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

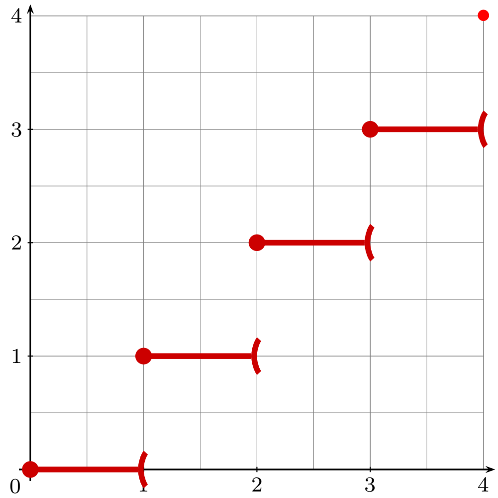
Remarques. Le fait que les fonctions usuelles soient continue sur leur ensemble de définition permet de justifier les calculs du type

$$\lim_{x\to 1} x^2 - 5 = -4 \qquad \text{ou bien} \qquad \lim_{x\to -57} \frac{1}{x} - x = -\frac{1}{57} + 57.$$

Par contre cela ne dit rien pour des limites intéressantes, *i.e.* pour des limites sur le bord du domaine de définition.

Exemple. On peut facilement construire des fonctions qui sont **discontinues** :





$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-2, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 2] \end{cases} \quad \text{est discontinue}$$

On observe un saut en $x = 0$

La fonction *partie entière* définie par $x \mapsto f(x)$ où $f(x)$ est l'entier qui est immédiatement inférieur ou égal à x

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et est discontinue : on observe des sauts en chaque valeures entières de x

8.2 Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

On travail dans cette sous-section dans un intervalle fermé et borné : $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
On se donne une fonction f définie et **continue** sur $[a, b]$.

Définition. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ lorsque

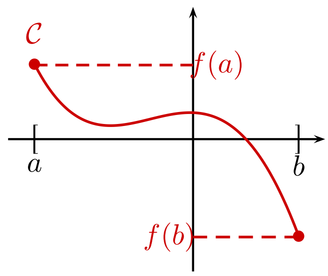
$$f(a) \le \ell \le f(b) \text{ si } f(a) \le f(b) \textbf{ ou bien } f(a) \ge \ell \ge f(b) \text{ si } f(a) > f(b).$$

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (abrégé par TVI et énoncé ci-dessous) exprime un fait *presque* évident :

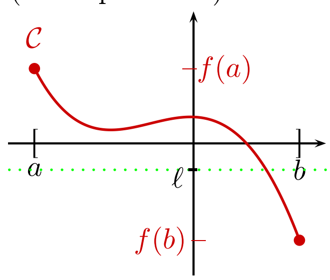
- on fixe une valeur ℓ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$
- Le but du TVI est de **prouver l'existence** d'une solution à l'équation $f(x) = \ell$ où l'inconnue est x et x parcourt l'intervalle $[a, b]$.

L'existence d'une telle solution est *affreusement évidente* sur un graphique, cela se fait en 3 étapes :

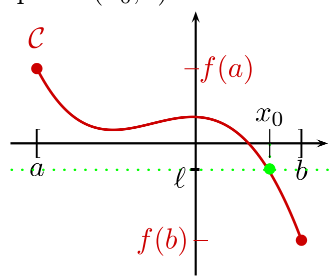
1) On trace la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f



2) On place ℓ sur les ordonnées
On trace la droite $y = \ell$
(ici en pointillés)



3) <u>Le théorème dit</u> :
il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que le point (x_0, ℓ) soit sur la courbe



Plus précisément, le théorème peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème des Valeurs Intermédiaires [TVI].
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit ℓ une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \ell$.

Remarque.

1. Ce théorème peut se reformuler de la manière suivante :

   Toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes au moins une fois par f.

2. Le TVI ne donne **aucune information sur la localisation** de la solution x_0 outre le fait que $x_0 \in [a, b]$.
   Généralement, si on désire une valeur approchée de cette solution, alors on procède par dichotomie en divisant l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalle et on essaie alors de localiser quel sous intervalle contient une solution en réitérant l'utilisation du TVI.
3. Le TVI ne donne **aucune information sur le nombre de solution** outre le fait que l'on sait qu'il en existe au moins une.
   Par contre, si on sait que la fonction f est strictement monotone (strictement croissante ou bien strictement décroissante) alors, il est clair que l'équation $f(x) = \ell$ possède au plus une solution. Ainsi si x_0 est une solution, alors x_0 est unique.
4. L'hypothèse "f est continue sur $[a, b]$" est **fondamentale**. Par exemple avec $a = -3$ et $b = 8$, la fonction de l'exercice 1 est définie sur $[-3, 8]$ mais n'est pas continue. On a $f(-3) = 5$ et $f(8) = 1$ par contre, on peut facilement voir qu'il n'existe pas de $x \in [-3, 8]$ tel que $f(x) = 2,5$ et pourtant $1 \leq 2,5 \leq 5$ ...
5. Une variante très utilisée du TVI est :

   Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires [donc la valeur 0 est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$], alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 12 Soit $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

1. Justifier très rapidement que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
3. En utilisant le TVI montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

9 Extrait de DS des années précédentes

Exercice 13 [DS 4 2015-2016 et 2014-2015] Pour chacune des limites ci-dessous :

- Calculer la limite,
- Préciser systématiquement si le résultat du calcul permet d'obtenir l'existence ou non d'une asymptote à la courbe représentant la fonction dans un repère,
- Si la courbe admet une asymptote préciser le type d'asymptote et en donner une équation.

1. $\lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 2x + 3$
2. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{5 - x}$
3. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3 + x}{4 - 2x}$
4. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 7x + 10}$
5. $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 3$
6. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^3 + x + 17}{-x^2 + 2x - 1}$
7. $\lim_{x \to +\infty} (2 - \sqrt{x}) \left(5 + \dfrac{1}{x}\right)$
8. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 3)^2}$