Fiche 2
Développement - Factorisation

L'objectif de cette fiche est de travailler les notions de développement et de factorisation d'une expression littérale.
Une expression littérale est une succession d'opérations mathématiques $(+, -, \times, \div, ...)$ dans laquelle apparaissent des quantités sous la forme de lettres (ou d'autres symboles).
Par exemple "$2a + b$" est une expression littérale où deux quantités qui sont "a" et "b" sont mélangées dans un calcul : *multiplier a par 2 et ajouter b.*

$\rightsquigarrow$ Une même expression littérale peut prendre plusieurs formes, par exemple, si on note $A = 2a^2 + 8a + 8$, rien ne nous interdit d'écrire $A = a^2 + a^2 + 8(a + 1)$ ou encore $A = 2(a + 1)^2 + 4a + 6$.

$\rightsquigarrow$ Le choix de la forme dépend essentiellement de ce que l'on désire faire.

Par exemple, dans le cas de chiffres,

- Si on souhaite réaliser mentalement le calcul 140×5 (qui est donc ici une multiplication), il peut être plus commode de le voir sous la forme d'une addition $140\times5 = 100\times5+40\times5 = 500 + 200 = 700$.
- Si on souhaite simplifier la fraction $\dfrac{75}{125}$, il est pratique de voir les chiffres 75 et 125 sous la forme de produits (on parle de forme factorisée), $75 = 3 \times 25$ et $125 = 5 \times 25$ ainsi on peut obtenir :
$$\frac{75}{125} = \frac{3 \times 25}{5 \times 25} = \frac{3}{5}.$$

Notion I. Développer, réduire et ordonner une expression

Le premier exemple présenté avec des chiffres illustre la notion de développement :
"*Développer une expression c'est réaliser le maximum de multiplication afin de n'avoir au final que des additions (avec éventuellement des multiplications pour les coefficients)*"
Par exemple, l'expression $A = (2x + 1) \times 5 + (5x + y)(2x + 3)$ présente plusieurs opérations qui peuvent être faites afin d' "avoir A sous une forme développée"

$$\begin{aligned} A = &\ (2x + 1) \times 5 + (5x + y)(2x + 3) \\ = &\ 2x \times 5 + 1 \times 5 + 5x \times (2x + 3) + y \times (2x + 3) \\ = &\ 10x + 5 + 5x \times 2x + 5x \times 3 + y \times 2x + y \times 3 \\ = &\ 10x + 5 + 10x^2 + 15x + 2xy + 3y \text{ c'est } \textbf{UNE forme développée} \text{ de } A. \end{aligned}$$

Il est clair que dans la dernière ligne de l'exemple précédent, on peut continuer le calcul en réalisant quelques additions (afin de regrouper tous les termes de même puissance) :

$$\begin{aligned} A = &\ 10x + 5 + 10x^2 + 15x + 2xy + 3y \\ = &\ 25x + 5 + 10x^2 + 2xy + 3y \text{ c'est } \textbf{UNE forme développée et réduite} \text{ de } A. \end{aligned}$$

Lorsque les expressions commencent à être compliqué, il vaut mieux essayer d'avoir un certain ordre dans l'écriture, on parle de forme ordonnée :

$$\begin{aligned} A = &\ 25x + 5 + 10x^2 + 2xy + 3y \\ = &\ 10x^2 + 2xy + 25x + 3y + 5 \text{ c'est } \textbf{LA forme développée, réduite et ordonnée} \text{ de } A. \end{aligned}$$

Généralement, on ordonne une forme réduite selon les règles suivantes :

1. On met les termes de plus grandes puissances en premier.

2. Quand deux termes ont la même puissance, on les range par ordre alphabétique.

Exercice 1 Les identités remarquables
Développer, réduire et ordonner :

$$(a+b)^2 \quad ; \quad (a-b)^2 \quad ; \quad (a-b)(a+b)$$

Exercice 2 Développer, réduire et ordonner :

A= $(4x+3)^2$

B= $(2-5x)^2$

C= $(3a+5)^2$

D= $(4m+6)^2$

E= $(5x+2)(5x-2)$

F= $(3x+5)(3x-4)$

Exercice 3 Développer, réduire et ordonner en utilisant les identités remarquables :

A= $(x+3)^2$

B= $(5x+2)^2$

C= $(3x-4)^2$

D= $(2-3x)^2$

E= $(3-4b)^2$

F= $\left(\frac{3}{4}x+2\right)^2$

Notion II. Factoriser une expression

Le deuxième exemple numérique de cette fiche (simplifier la fraction 75/125) utilise la notion de factorisation :

⇝ Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

⇝ Le verbe "*factoriser*" peut être interprété comme "*créer des facteurs*" c'est à dire des éléments d'une multiplication (5 et 25 sont les facteurs de la multiplications $25 \times 5 = 125$).

Par exemple :

$$\begin{aligned} A &= (2x+3)(5x-1)+(2x+3)(x-2) \\ &= (2x+3)[(5x-1)+(x-2)] \\ &= (2x+3)(6x-3). \end{aligned}$$

Essentiellement deux techniques de factorisation sont à garder en tête

1. La plus naturelle : chercher des facteurs en commun.
C'est cette méthode qui a permis d'obtenir l'exemple précédent :
- $A = (2x+3)(5x-1)+(2x+3)(x-2)$ est la somme de deux termes ;
- Ces deux termes sont : $(2x+3)(5x-1)$ et $(2x+3)(x-2)$;
- On voit facilement que ces termes ont le facteur $(2x+3)$ en commun ;
- Ainsi on peut factoriser par $(2x+3)$.

2. Utiliser des *identités remarquables*
Cette méthode demande un regard familier avec les *identités remarquables* déjà démontrées :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

Dans chacune des trois identités remarquables, le membre de gauche de l'égalité correspond à la forme factorisée et celui de droite à la forme développée.

L'idée est d'essayer d'identifier que doivent être a et b dans le but de pouvoir retrouver l'une des trois formes de droites (forme développée).

Par exemple,

- Pour $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2$, on utilise la première identité avec $a=2x$ et $b=1$, ainsi on obtient
$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2.$$
- Pour $9x^2-12x+4=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2$, on utilise la deuxième identité avec $a=3x$ et $b=2$, ainsi on obtient
$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2.$$
- Pour $16x^2-49=(4x)^2-7^2$, on utilise la troisième identité avec $a=4x$ et $b=7$, ainsi on obtient
$$16x^2-49=(4x-7)(4x+7).$$

Exercice 4 Parmi les expressions suivantes, trouver celles qui sont factorisées, celles qui sont développées ou bien celles qui ne sont ni factorisées, ni développées

A= $(2a+5)(3a-4)$

B= $3a^2-12$

C= $(P+5)(R+8)$

D= $5x(3+2x)+3x-1$

E= $2x^2+3x-4$

F= $(5a+8)(3a-5)(2a+7)$

Exercice 5 Factoriser les expressions suivantes en cherchant des facteurs en commun

A= $7x^2+7x$

B= $(2x+1)x+2x+1$

C= $(5x+2)(4x-3)+(5x+2)(6x+4)$

D= $(8x-3)(3x+7)+(8x-3)(5x-4)$

Exercice 6 Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables.

A= $4x^2+12x+9$

B= $36x^2+60x+25$

C= $16a^2+12a+9$

D= $16+24b+9b^2$

E= $49c^2+14c+4$

F= $25-20x+4x^2$

G= $25b^2+36-60b$

H= $(9x+6)^2-(5x+2)^2$

I= $(3x+4)^2-(8x+6)^2$

Exercice 7

1. On pose $A=4x^2-25-(2x+5)(3x-7)$.

   a) Développer et réduire A.

   b) *i.* Factoriser $4x^2-25$.

   ii. En déduire une factorisation de A.

2. a) Développer l'expression $B=(x+3)^2+(x+3)(2x-3)$.

   b) Factorise l'expression B.

   c) Calculer la valeur de B lorsque $x=-3$.

3. a) Développer l'expression $C=(3x-1)^2-(x-4)(3x-1)$.

   b) Factoriser l'expression C.

   c) Calculer la valeur de C lorsque $x=1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8 Développer et réduire

A= $(2a+5)(2a-5)$

B= $(b-3)(b+3)$

C= $(8+c)(8-c)$

D= $(6x-2)(-2x+1)$

E= $\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{4}x\right)^2$

F= $\left(\frac{5}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x+\frac{2}{3}\right)$

G= $3(2x+3)(x-1)$

H= $(8b-4)(5+3b)$

I= $2c(-3c+9)$

J= $(5d+6)^2-(3d-4)^2$

K= $3(4x-5)^2+8(3+2x)$

L= $3(6x-3)^2-4(3x+5)^2$

Exercice 9 Factoriser les expressions suivantes par la méthode de votre choix.

A= $(8x-3)(3x+7)+(8x-3)(5x-4)$

B= $16x^2-25$

C= $(4x+7)(3x-2)+(3x-2)(5x-3)$

D= $(4x-3)^2-36$

E= $4x^2-36$

F= $5x^3-x^2$

G= $64-(3x-2)^2$

H= $49x^2-36r^2$

I= $(4x+7)(3x-2)+(3x-2)(5x-3)$

J= $25x^2-70x+49$

K= $(9r-3)(4r-2)+(9r-3)^2$

L= $(2m-1)^2-(6m-3)(4m+2)$