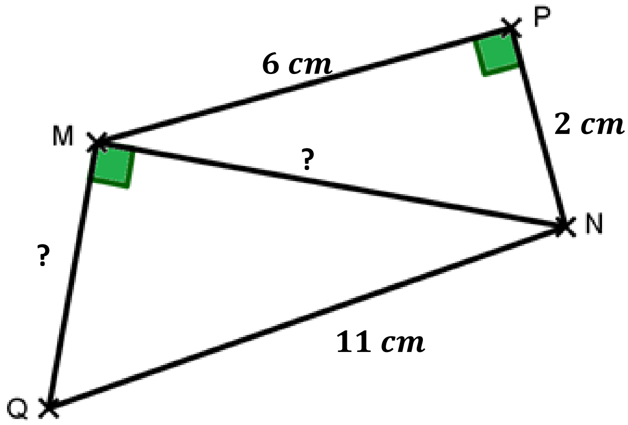
Trigonométrie dans le triangle rectangle

I – Relations métriques dans le triangle rectangle :

A) Le théorème de Pythagore :

Propriété :
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors on $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

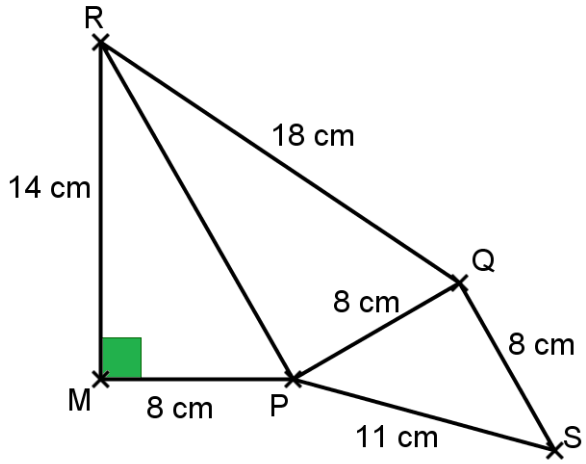
Exercice 1 :
Dans la figure ci-dessous, déterminer les longueurs manquantes :



B) La Réciproque du théorème de Pythagore :

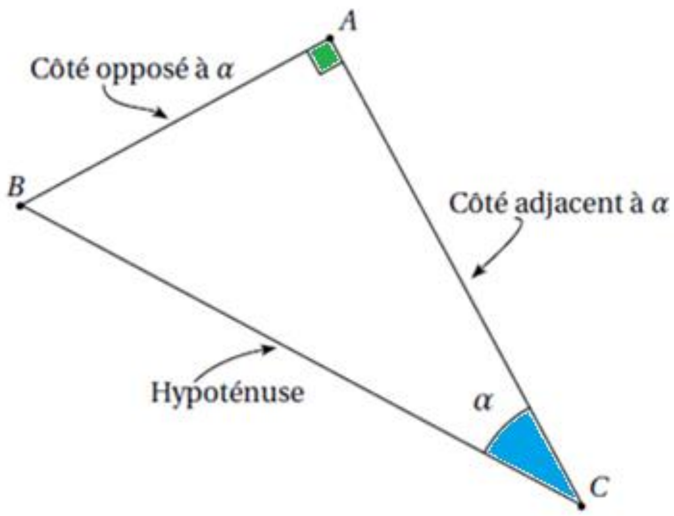
Propriété :
Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.
Si le triangle ABC est tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors il est rectangle en A.

Exercice 2 :
Les triangles PQR et PQS sont-ils rectangles ?



II – Relations trigonométriques :

On considère le triangle ci-dessous :



Définition :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On notera α l'angle $\widehat{ACB}$.

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}}$$

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}}$$

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}}$$

III – Pour quoi faire ? :

A) Pour calculer des longueurs :

Lorsque, dans un triangle rectangle, on connaît la longueur d'un des côtés ainsi que la mesure de l'un des angles aigus, on peut calculer les longueurs des deux autres côtés.

Exemple :

Supposons que dans le triangle ABC rectangle en A, on ait $AB = 12\ cm$ et $\widehat{ACB} = 30°$. Alors on peut calculer la longueur du côté $[AC]$ en utilisant la formule de la **tangente** :

$$tan\ \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Donc } AC = \frac{AB}{tan\ \widehat{ACB}} = \frac{12}{tan 30°}\ cm \text{ (valeur exacte)} \approx 20{,}8\ cm \text{ (valeur arrondie au dixième)}$$

De même, on peut calculer la longueur du côté $[BC]$, soit en utilisant le théorème de Pythagore, soit en utilisant la formule du **sinus** :

$$sin\,\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Donc } BC = \frac{AB}{sin\ \widehat{ACB}} = \frac{12}{sin30°} = 24\ cm$$

B) <u>Pour calculer des mesures d'angles</u> :

Lorsque, dans un triangle rectangle, on connaît la longueur de deux côtés, on peut calculer les mesures des deux angles aigus du triangle.

<u>Exemple</u> :

Supposons que dans le triangle ABC rectangle en A, on ait $AB = 12\ cm$ et $BC = 16\ cm$. Alors on peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant la formule du **sinus**.

$$sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{16} = 0{,}75$$

D'où à l'aide de la calculatrice et de sa touche sin^{-1} ou $arcsin$

$$\widehat{ACB} = \text{arcsin}(0{,}75)\text{ (valeur exacte)} \approx 48.6°\text{(valeur arrondie au dixième)}$$

De même, on calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ avec la formule du **cosinus**.

$$cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{16} = 0{,}75$$

$$\text{Ainsi } \widehat{ABC} = \text{arccos}(0{,}75)\text{ (valeur exacte)} \approx 41{,}4°\text{(valeur arrondie au dixième)}$$

<u>Exercice 3</u> :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 2\ cm$ et $BC = 6\ cm$.
Déterminer les mesures des angles aigus, ainsi que la longueur du segment $[AB]$.

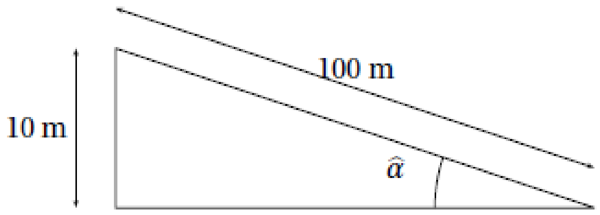
<u>Exercice 4</u> :

DEF est un triangle rectangle en E tel que $\widehat{FDE} = 62°$ et $DE = 4\ cm$.
Déterminer FD, FE ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{EFD}$

Exercice 5 : ***Un panneau routier***

Le panneau routier ci-contre avertit le conducteur d'une descente dangereuse en annonçant une déclivité de 10 %.

1) D'après vous, que signifie concrètement ce panneau ?
2) On a la situation suivante :



a- Combien vaut l'angle $\widehat{\alpha}$?

b- Sachant que la descente est longue de 3700 mètres, quelle sera la dénivellation totale ?

IV – Formules trigonométriques :

Propriété 1 :
Soit x la mesure, en degrés, d'un angle aigu α quelconque.
Alors on a, pour toute valeur de x :

$$\mathbf{0 < \cos x < 1} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{0 < \sin x < 1}$$

Preuve :
Cela provient du fait que, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long : supposons que x soit la mesure en degrés d'un angle $\alpha = \widehat{ACB}$ dans un triangle ABC rectangle en A (voir figure p1). On a alors $\cos x = cos\,\widehat{\alpha} = \frac{AC}{BC}$ avec $AC < BC$ (car $[BC]$ est l'hypoténuse), et donc il vient que $\cos x < 1$.
De plus, comme AC et BC sont des longueurs, on a $AC > 0$ et $BC > 0$; par conséquent

$$\cos x = cos\,\alpha = \frac{AC}{BC} > 0$$

C'est la même démonstration pour le sinus

Propriété 2 :
Soit x la mesure, en degrés, d'un angle aigu α quelconque.
Alors on a, pour toute valeur de x :

$$\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Remarques :

- On écrit $\cos^2 x$ pour $(\cos x)^2$ et ceci dans le but d'éviter toute confusion avec $\cos x^2$, dans le cas où l'on oublierait d'écrire les parenthèses.
- Cette formule peut permettre d'obtenir le sinus d'un angle aigu lorsque l'on connaît son cosinus, et vice-versa.

Preuve :

Supposons que x soit la mesure, en degrés, d'un angle $\alpha = \widehat{ACB}$ dans un triangle ABC rectangle en A (voir figure p1).

On a alors $\cos x = \cos \alpha = \frac{AC}{BC}$ et $\sin x = \sin \alpha = \frac{AB}{BC}$

Ainsi on peut écrire que : $\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}$

Or, le triangle ABC est rectangle en A, le théorème de Pythagore nous dit que : $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

On peut donc conclure que :

$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Propriété 3 :

Soit x la mesure, en degrés, d'un angle aigu α quelconque.

Alors on a, pour toute valeur de x :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Preuve :

Supposons que x soit la mesure, en degrés, d'un angle $\alpha = \widehat{ACB}$ dans un triangle ABC rectangle en A (voir figure p1).

On a alors $\cos x = \cos \alpha = \frac{AC}{BC}$ et $\sin x = \sin \alpha = \frac{AB}{BC}$

Ainsi on peut écrire que :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} = \tan x$$

Exercice 6 :

En utilisant les formules de trigonométrie, calculer, dans chaque cas, les rapports trigonométriques manquants ($cosx$; $sinx$; $tanx$)

Dans chaque cas x désigne la mesure, en degrés, d'un des deux angles aigus dans un triangle rectangle.

1) $sinx = \frac{1}{2}$

2) $sinx = 2$

3) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{4}$

4) $tanx = 2$

V – Quelques valeurs particulières :

Dans un triangle rectangle, il existe des mesures d'angles pour lesquelles les valeurs des sinus, cosinus et tangente sont connues :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	1	0	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	0	1	