Fiche 3
Résolution d'équations

1 Une équation est une question

Une **équation** correspond à une formulation mathématique de certaines questions. Elle se présente sous la forme d'une relation d'**égalité** entre des nombres, dans laquelle une ou plusieurs **inconnues** sont à déterminer afin que l'égalité soit vérifiée.
Par exemple l'équation (où l'inconnue est notée x)

$$2x + 1 = 7$$

s'interprète comme :

Trouver tous les nombres x tels que multipliés par 2 et augmentés de 1 donnent 7.

`Trouver` x `tel que :` $\quad 2 \times x \quad + \quad 1 \quad = \quad 7$

Le nombre 3 *est une solution de l'équation*, car en remplaçant l'inconnue x par 3, on obtient une **VRAIE** égalité : $2 \times 3 + 1 = 7$.
Par contre 1 *n'est pas une solution de l'équation*, car en remplaçant l'inconnue x par 1, l'égalité obtenue est clairement **FAUSSE** : $2 \times 1 + 1 = 7$.
On peut facilement montrer qu'une telle équation n'admet qu'une seule réponse : $x = 3$. Ce que l'on note $\mathcal{S} = \{3\}$. En effet, pour s'en convaincre, on fait les opérations *à l'envers* (on *épluche* l'équation afin d'isoler x sous la forme $x = ...$) :

on part de l'equation initiale	$2x + 1 = 7$	$\downarrow -1$
on a retiré 1	$2x = 6$	$\downarrow \div 2$
on a divisé par 2	$x = 3$	
on obtient le résultat final	$\mathcal{S} = \{3\}$	

2 La stratégie de résolution

Un des objectifs de cette fiche est de savoir résoudre les équations de la forme :

$$ax + b = cx + d.$$

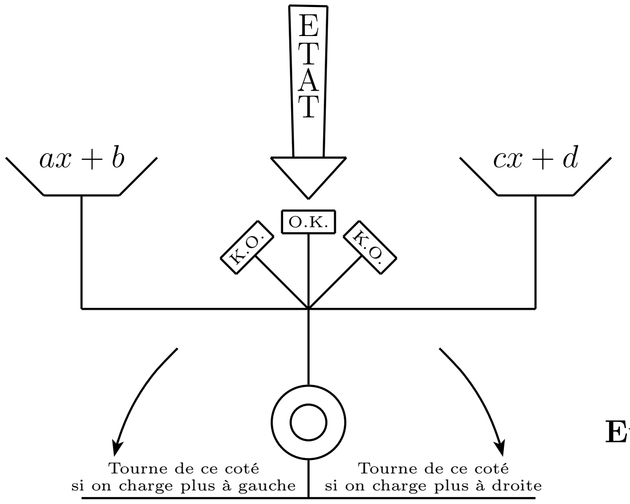
- a, b, c, d sont des nombres fixés, par exemple $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ nous donne l'équation $x + 2 = 3x + 4$
- x est l'inconnue, résoudre l'équation consiste à trouver pour quelles valeurs de x l'égalité est vraie.

La *résolution de l'équation* consiste à *éplucher* l'équation afin d'obtenir : $x = ...$

Plus précisément, résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'égalité proposée.

2.1 La méthode générale

Afin de pouvoir mener à bien cet épluchage de l'équation, on peut se représenter l'équation comme une balance à l'équilibre :



- Il faut toujours que la balance reste à l'équilibre
- On peut faire toutes les opérations que l'on veut, mais on doit les faire des deux cotés :
  - → Additionner ou soustraire
  - → Multiplier ou diviser (pas par 0 !)
- Une stratégie gagnante :

Etape 1. On met tous les x à gauche et tous les nombres à droites

Etape 2. Ensuite on divise pour avoir $x = ...$

Pour résumer on garde en tête les règles suivantes :

- on ne change pas une égalité en additionnant (on en soustrayant) un même nombre aux deux membres de l'égalité.
- on ne change pas une égalité en multipliant (on en divisant) par un même nombre non nul les deux membres de l'égalité.

Chacune des étapes de la stratégie correspond à une reformulation de l'équation initiale !
Exemple :

$$\begin{array}{rrcll} & 8x+7 & = & 11x+4 & \texttt{on soustrait } 11x \texttt{ des deux cotés} \\ \Leftrightarrow & -3x+7 & = & 4 & \texttt{on soustrait 7 des deux cotés} \\ \Leftrightarrow & -3x & = & -3 & \texttt{on divise par } -3 \texttt{ des deux cotés} \\ \Leftrightarrow & x & = & 1 & \end{array}$$

Ainsi $x = 1$ est l'unique solution de l'équation et donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 3 = 6 - x$
2. $x - 4 = 2x + 4$
3. $5x + 7 = 45 + 3x$
4. $1 - 4x = 3x$
5. $11x = -55 + 4x$
6. $2x + 1 = x$
7. $\sqrt{3}x + 5 = 14x - \sqrt{5}$
8. $\pi x - 1 = -8x + \sqrt{2}$
9. $\sqrt{\pi}x - 6\pi = \sqrt{3} + x$

2.2 Tout marche bien, mais il faut être attentif ...

Il est possible qu'une équation de la forme $ax + b = cx + d$ admette plusieurs solutions ou au contraire n'en admette pas du tout. Cela se passe lorsqu'il y a autant de x à gauche qu'à droite ($a = c$).
Dans ce cas, en appliquant la stratégie (de la balance), on tombe sur $0 = d - b$. Il faut alors dire si l'égalité que l'on a sous les yeux est **VRAIE** ou au contraire **FAUSSE**.
On se retrouve avec les deux cas de figure suivants :

- Si $d - b = 0$ est vraie ($d = b$), alors pour n'importe quelle valeurs de x l'équation est satisfaite : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

- Sinon $d - b = 0$ est fausse ($d \neq b$) et donc il n'y a pas de solution à l'équation : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exemple:

$x + 5 + x - 8 = 2x - 3$		$2x + 5 = 2x - 3$	
$\Leftrightarrow 0 = 0$	VRAI	$\Leftrightarrow 0 = -8$	FAUX
toutes les valeurs possibles		aucune valeur de x	
de x sont solutions	$\mathcal{S} = \mathbb{R}$	n'est solution	$\mathcal{S} = \emptyset$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes :

1. $2x + 5 = 2x - 1$
2. $2(x - 5) - 5x = -3x - 10$
3. $x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2$
4. $3(2x - 5) - (4x + 7) = 5(2x - 1) - 3x$

3 Des exercices

3.1 Des équations

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes :

(a) $3x + 3 = 9x + 7$

(b) $6x + 27 = 7x + 2$

(c) $2x - 22 = 4x + 3$

(d) $10x + 5 = 7x - 7$

(e) $4x + 6 = 6x + 6$

(f) $13x + 8 = 10x + 5$

(g) $7x + 11 = 3x + 6$

(h) $3x + 1 = 10x + 1$

(i) $8x + 8 = 5x + 8$

(j) $3x + 12 = 7x - 9$

(k) $7x - 10 = 9x + 4$

(l) $-5x - 19 = 4x + 9$

(m) $9x + 16 = 8x - 2$

(n) $2x - 25 = 2x + 5$

3.2 Des problèmes

Exercice 4 Justine a 5 ans et sa grand-mère a 50 ans.
Dans combien d'années, l'âge de sa grand-mère sera-t-il le quadruple de l'âge de Justine ?

Exercice 5 Le périmètre d'un rectangle est de 168 m. La largeur représente les trois quart de la longueur.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?

Exercice 6 Les Anglo-saxons utilisent le degré *Fahrenheit* comme unité de mesures de température, alors que nous utilisons le degré *Celsius*. La température T_F en degrés Fahrenheit s'écrit en fonction de la température T_C en degrés Celsius de la manière suivante : $T_F = 1,8 \times T_C + 32$.

1. Calculer T_F lorsque $T_C = 0$.
2. Calculer T_C lorsque $T_F = 0$, puis $T_F = 68$, puis $T_F = 104$.
3. Pour quelle température, a-t-on $T_F = T_C$?

4 Les équations produits

Si on souhaite résoudre l'équation $(3x-8)(7x+1)=0$, après avoir développé le membre de gauche, on est bien embêté pour appliquer la méthode proposée auparavant (mettre tout les x à gauche et tout les nombres à droite) !
On utilise le résultat suivant : Soit A et B deux expressions littérales, alors

$$\boxed{A \times B = 0 \text{ si et seulement si } A = 0 \textbf{ ou } B = 0}$$

C'est à dire résoudre l'équation $A \times B = 0$ revient à résoudre $A=0$ et $B=0$:

Les solutions de $A \times B = 0$ seront alors les solutions de $A=0$ **ou** *celles de $B=0$.*

Pour revenir à l'équation $(3x-8)(7x+1)=0$, on a donc

$$\begin{array}{rc} & (3x-8)(7x+1)=0 \\ \Leftrightarrow & 3x-8=0 \text{ ou } 7x+1=0 \\ \Leftrightarrow & x=\dfrac{8}{3} \text{ ou } x=-\dfrac{1}{7} \\ & \\ \text{ainsi} & \mathcal{S}=\{-\dfrac{1}{7},\dfrac{8}{3}\} \end{array}$$

Ce résultat peut facilement être étendu à une équation produit avec plus que deux facteurs.

ATTENTION. Cette méthode ne s'applique **que** pour un produit égale à 0.
Par exemple **ON NE PEUT PAS** l'utiliser pour l'équation $(2x+1)(x-18)=1$!

Exercice 7 Résoudre les équations suivantes :

1. $(2x+1)(x-4)=0$
2. $(2x+7)(-5x+2)=0$
3. $x(2x-3)(-x+4)=0$
4. $(3-x)(2x+7)(5+x)=0$
5. $(x-\pi)(5x-\sqrt{2})=0$
6. $x^{28}(2x-5)^{17}=0$

Exercice 8 $\star$ Résoudre les équations suivantes :

1. $64x^2-81=0$
2. $121x^2-22x+1=0$
3. $x^3-x=0$
4. $(x-5)^{17}(x-3)^4=0$
5. $x^4-2x^2+1=0$
6. $x^3-9x^2=0$
7. $4x^2=36$
8. $\dfrac{25}{4}x^2-5x+1=0$

5 Les systèmes d'équations

Il est possible de rencontrer des équations présentant plusieurs inconnues, par exemple : $2x+y=35$.
Cette équation peut par exemple correspondre au problème suivant :

À la boulangerie je prends x pain(s) au chocolat et y croissant(s), un pain au chocolat coûte 2 euros et un croissant coûte 1 euro. Je paye 35 euros. Combien de pain(s) au chocolat et combien de croissant(s) ai-je pris ?

Ici x et y sont les deux inconnues de l'équation. Une telle équation admet beaucoup de solutions, par exemple on peut prendre $x = 0$ et $y = 35$ **ou bien** $x = 1$ et $y = 33$ ...
Il est clair que je peux soit prendre 0 pain au chocolat et 35 croissants **ou bien** 1 pain au chocolat et 33 croissants ...
Afin de pouvoir déterminer de manière unique x et y il faut rajouter une deuxième condition, par exemple : $x + y = 20$.
Cette deuxième équation peut être interprétée de la manière suivante :

Au total j'ai 20 viennoiseries.

En se fixant une deuxième condition, on peut alors résoudre le problème.
Le fait de considérer le deux équations en même temps s'exprime mathématiquement par la notion de *système d'équations* :

$$\begin{cases} 2x + y & = 35 \\ x + y & = 20 \end{cases}.$$

Un tel système peut se résoudre de deux manières différentes : La *technique de substitution* et la *technique de combinaison.*

Le but de chacune de ces deux techniques est le même : supprimer une inconnue afin d'avoir une équation à une inconnue (c'est à dire de la forme traitée en début de fiche) que l'on peut alors résoudre de manière standard.

On va donc chercher à éliminer une inconnue dans une des équations en s'aidant de l'autre équation afin d'obtenir un système dont l'une des lignes est une équation du premier degré à une inconnue.

5.1 La technique de substitution

Par définition, la substitution est l'action de remplacer, de mettre l'un à la place de l'autre.

Le but de la substitution est d'exprimer, à l'aide d'une des deux équations une inconnue en fonction de l'autre, ensuite on remplacera cette inconnue par son expression dans la deuxième équation.

Par exemple :

$$\begin{cases} 2x + y & = 35 \\ x + y & = 20 \end{cases}$$

On écrit le système et on regarde laquelle des deux inconnues je vais exprimer en fonction de l'autre et à l'aide de quelle ligne...

$$\iff \begin{cases} y & = 35 - 2x \\ x + y & = 20 \end{cases}$$

J'ai choisi d'exprimer y en fonction de x à l'aide de la première ligne

$$\iff \begin{cases} y & = 35 - 2x \\ x + 35 - 2x & = 20 \end{cases}$$

Je remplace y par $35 - 2x$ dans la deuxième ligne, la deuxième ligne devient alors un simple équation à une inconnue

$$\iff \begin{cases} y & = 35 - 2x \\ x & = 15 \end{cases}$$

Je résous l'équation de la deuxième ligne

$\iff \begin{cases} y &= 35 - 2 \times 15 \\ x &= 15 \end{cases}$ Je remplace à présent la valeur trouvée pour x dans la première ligne

$\iff \begin{cases} y &= 5 \\ x &= 15 \end{cases}$ Il suffit alors d'effectuer les calculs dans la première ligne afin de trouver la valeur de y

$\mathcal{S} = \{(15, 5)\}$ J'écris alors la solution sous la forme d'un *couple* où je place x avant y

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus on a choisi d'exprimer y en fonction de x mais on aurait bien pu exprimer x en fonction de y ...

ATTENTION. L'ordre de l'écriture de la solution est très important. Le fait d'écrire la solution sous la forme d'un couple $(15, 5)$, signifie que le primer nombre, 15, correspond à la valeur de x et que le deuxième, 5, à la valeur de y.

5.2 La technique de combinaison

La combinaison est l'action de grouper, d'unir plusieurs objets pour en former un nouveau. Le but de la combinaison est de supprimer une inconnue en remplaçant une équation par une *combinaison linéaire* des deux équations :

$\begin{cases} 2x + y &= 35 \\ x + y &= 20 \end{cases}$ On écrit le système et on regarde comment on pourra supprimer une variable ...

$\iff \begin{cases} 2x + y - (x + y) = 35 - 20 \\ x + y = 20 \end{cases}$ J'ai choisi de soustraire la première ligne à la deuxième et d'écrire la ligne obtenue à la place de la première ligne

$\iff \begin{cases} x &= 15 \\ x + y &= 20 \end{cases}$ Il me suffit à présent de résoudre l'équation de la première ligne qui est une équation à une inconnue

$\iff \begin{cases} x &= 15 \\ 15 + y &= 20 \end{cases}$ Je remplace dans la deuxième ligne la valeur de x trouvée précédemment

$\iff \begin{cases} x &= 15 \\ y &= 5 \end{cases}$ Je résous l'équation de la deuxième ligne

$\mathcal{S} = \{(15, 5)\}$ J'écris alors la solution sous la forme d'un *couple* où je place x avant y

Exercice 9 Le couple $(1; 2)$ est-il solution des systèmes proposés? De même pour $(2; 1)$.

1. $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 9y = 17 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 6x + 7y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 6x + y = 19 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4u + t = 7 \\ 3u + 2t = 9 \end{cases}$$

Exercice 11 Pour conditionner du pâté, on utilise des bocaux, les uns contiennent 500 g et les autres contiennent 250 g.
On note x le nombre de bocaux de 500 g et y le nombre de bocaux de 250 g.

1. Sachant que 14 bocaux ont été préparés au total, écrire une relation liant x et y.
2. Sachant que 4,5kg de pâté ont été conditionnés, écrire une seconde relation liant x et y.
3. Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 10x + 5y = 90 \end{cases}$$
En déduire le nombre de bocaux de chaque sorte qui ont été utilisés.

Exercice 12 $\star$ Fred et Sarah sont les aînés d'une même et grande famille. Fred a deux fois moins de frères que de sœurs, tandis que Sarah a autant de sœurs que de frères.
Combien d'enfants y a-t-il dans cette famille ?

6 Encore des exercices

Exercice 13 Soit l'expression
$A(x) = (3x - 4)^2 - (3x - 4)(2x + 5)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $A(x)$.
2. Factoriser l'expression $A(x)$.
3. Résoudre l'équation $A(x) = 0$.

Exercice 14 Soit l'expression
$B(x) = (3x - 5)^2 - (2x + 1)^2$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $B(x)$.
2. Factoriser l'expression $B(x)$.
3. Résoudre $B(x) = 0$.

Exercice 15 $\star$ Résoudre l'équation suivante : $(25x - 1)^4 = (12x + x^2 + 36)^2$.

Exercice 16 Le périmètre d'un rectangle est 140 mm. En doublant la largeur initiale et en retranchant 7 mm à la longueur initiale, on obtient un nouveau rectangle dont le périmètre est égal à 176 mm. Quelles sont les dimensions du rectangle initial ?

Exercice 17 Trouver deux fractions de dénominateurs égaux à 7 et à 8. La somme de ces fractions est égale à $\frac{129}{56}$; et si l'on échange les numérateurs de ces fractions, la somme des fractions obtenues ainsi sera égale à $\frac{9}{4}$.

Exercice 18 Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$