Fiche 5
Fonctions I : Premières Définitions et Généralités

En mathématiques, les fonctions sont des transformations : chacune de ces transformations peut être représentée par une machine qui prend un nombre x et le transforme en un autre nombre y appelé *l'image* de x. Souvent la transformation est désignée par une lettre (par exemple f), dans ce cas on note $y = f(x)$ et la transformation s'écrit $f : x \mapsto f(x)$ ou bien $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$.

1 Motivations

Il est très fréquent de manipuler des quantités qui dépendent d'autres quantités, par exemple :

1. Si on va chez SuperPizza, *le roi de la pizza à* 8€, alors le prix à payer **est fonction du** nombre de pizzas que l'on prend ;
2. Si on loue une voiture pour une journée à 24€ la journée plus 0.1€ le kilomètre, le prix à payer **est fonction du** nombre de kilomètres parcourus ;
3. L'aire d'un carré **est fonction de** la longueur d'un de ses cotés ;
4. Le temps de parcourt d'une distance de 100 km à vitesse constante **est fonction de** la vitesse.

Exercice 1 Exprimer dans chacune des situations précédentes la relation qui relie les quantités en jeu :

1. On notera x le nombre de pizza(s) achetée(s) et $f(x)$ le prix payé ;
2. On notera x le nombre de kilomètres parcourus et $f(x)$ le prix payé ;
3. On notera x la longueur d'un coté du carré et $f(x)$ l'aire du carré ;
4. On notera x la vitesse de parcourt et $f(x)$ le temps de parcourt de 100 km à la vitesse constante égale à x (en km/h).

N.B. : Ici la notation générique $f(x)$ se lit "f de x" et est à voir comme une quantité qui est "fonction de x" (c'est à dire qui dépend de x).

2 Un peu de vocabulaire ... Et quelques exemples

2.1 Une fonction et son domaine de définition ?

Lorsque l'on se donne une fonction f, c'est à dire une transformation qui a x associe un nombre $f(x)$, il est naturel de se demander pour quelles valeurs de x, la transformation peut être faite. Plus précisément on s'intéresse à l'ensemble des x pour lesquels la transformation $x \mapsto f(x)$ ne peut pas être réalisée.

On peut rapidement lister les deux cas de figure où une transformation ne peut pas être réalisée:

- **Division** par 0. Puisque diviser par le nombre 0 est interdit, si on regarde la transformation qui à x associe son inverse $\dfrac{1}{x}$, alors la transformation ne peut pas être faite pour $x = 0$.

- **Racine** carrée d'un nombre strictement négatif. Par la définition de la racine carrée de x, $\sqrt{x}$ *est le nombre positif qui vérifie* $x = (\sqrt{x})^2$, x est forcément un carré et est donc positif. Ainsi, la transformation qui à x associe $\sqrt{x}$ ne peut pas être faite si x est strictement négatif.

L'ensemble de **tous** les nombres x pour lesquelles une transformation donnée f peut être réalisée [*i.e.* l'expression $f(x)$ n'utilise pas d'opérations interdites] s'appelle *le domaine de définition de* f.

Souvent on le note $\mathcal{D}_f$ pour souligner le fait que le domaine de définition est obtenu selon la fonction f.

Par exemple, si on donne :

1. $f(x) = x^2$ ou bien $f(x) = 2x + 1$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$: pour n'importe quelles valeurs de x on peut calculer $f(x)$;
2. $f(x) = \sqrt{x}$, alors $\mathcal{D}_f = [0, \infty[= \mathbb{R}^+$ car pour n'importe quel nombre positif x on peut calculer $f(x)$ par contre si x est strictement négatif, alors la racine carrée de x ne fait aucun sens.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ car pour n'importe quelle nombre x non nul on peut calculer $\frac{1}{x}$, par contre diviser 1 par 0 ne fait aucun sens.

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x} + x$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x+8}{2x-3}$
5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$
6. $f_6(x) = x^5$

Exercice 3 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes où les fonctions $f_1, ..., f_6$ sont définies dans l'exercice précédent :

1. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$
2. $g(x) = f_3(x) \times f_4(x)$
3. $h(x) = \dfrac{f_5(x)}{f_6(x)}$
4. $i(x) = \dfrac{f_6(x)}{f_5(x)}$
5. $k(x) = \sqrt{f_4(x)}$
6. [$\star$] $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f_2(x)}}$
7. [$\star$] $m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f_2(x) - f_1(x)}}$
8. [$\star$] $n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f_4(x) - f_1(x)}}$

Exercice 4 [$\star$] Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_7(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f_8(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3x-7}$
3. $f_9(x) = \sqrt{-x^2+x+1}$
4. $f_{10}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(5x-7)(3\pi x - \sqrt{2})}}$

2.2 Image/antécedent

On se donne f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

- Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on dit que $f(x)$ est l'*image de* x *par* f.

  $\rightsquigarrow$ Lorsque $x \in \mathcal{D}_f$, son image $f(x)$ **existe toujours et est unique**.

- Pour $\ell \in \mathbb{R}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_f$ solution de l'équation $\ell = f(x)$ s'appelle les *antécédents de ℓ par f*.

  $\rightsquigarrow$ Cet ensemble peut être noté $\mathcal{A}_\ell$ et peut être vide ou bien avoir un grand nombre d'éléments.

Exercice 5 Après avoir déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, déterminer les images et l'ensemble des antécédents aux valeurs demandées :

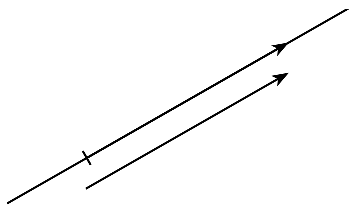
1. $f(x) = x^2$
   (a) Déterminer les images en 0, 1, -1 et 15
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   (a) Déterminer les images en 1, -1 et 10^{-1}
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.
3. $f(x) = 1$
   (a) Déterminer les images en 1, -1 et 10^{-1}
   (b) Déterminer les éventuels antécédents de ℓ par f pour $\ell = 0, 1, -1, 100$.

3 Les coordonnées d'un point dans un repère

3.1 Les vecteurs

Un vecteur est un déplacement qui est entièrement déterminé par trois données

1. **Une direction.** Suivre un axe/droite
2. **Un sens.** Un sens de parcourt de la direction
3. **Une longueur.** La longueur de parcourt de la direction dans le sens donné



On peut nommer les vecteurs par des lettres de l'alphabet (généralement i, j, u, v, w) surmonter d'une flèche : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ...
Lorsque l'on se donne deux points A et B, disons Lyon et Créteil sur la carte de la France, il est clair que le trajet pour aller de Lyon à Créteil à vol d'oiseau définit un vecteur :

- **Une direction.** l'axe Lyon/Créteil qui est exactement le même que l'axe Créteil/Lyon
- **Un sens.** de Lyon vers Créteil
- **Une longueur.** la distance à vol d'oiseau entre Lyon et Créteil

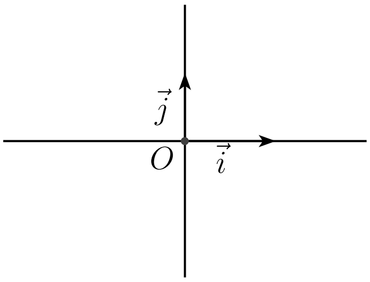
Dans ce cas on parle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Remarque.

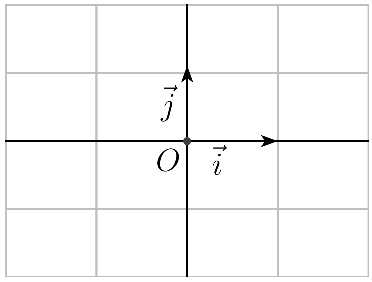
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs alors on peut définir le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ comme étant le déplacement de $\vec{u}$ suivi de celui de $\vec{v}$ (ou bien le contraire, l'ordre ne change rien).
- Si $x \in \mathbb{R}$ est un nombre réel et $\vec{u}$ est un vecteur, alors $x\vec{u}$ correspond au déplacement de $\vec{u}$ fait x fois avec la règle que si x est négatif alors on change de sens de parcourt.

3.2 Le repérage dans le plan

On se donne un repère **orthogonal** $(0,\vec{i},\vec{j})$ *i.e.*:

- une origine O, *i.e.*, *on se fixe un point*
- 2 vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont orthogonales[1].





Une fois que l'on s'est donné un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, un point M est uniquement *repéré* par ses *coordonnées* (x,y) où $x,y \in \mathbb{R}$:

- $\rightarrow$ On considère le déplacement de O à M, c'est à dire, le vecteur $\overrightarrow{OM}$
- $\rightarrow$ $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique en *un multiple de* $\vec{i}$ **plus** *un multiple de* $\vec{j}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- $\rightsquigarrow$ le couple (x,y) s'appelle les **coordonnées** de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, x désigne l'**abscisse** de M et y l'**ordonnée** de M; on note souvent $M(x,y)$
- $\rightsquigarrow$ l'axe horizontal s'appelle l'axe des abscisses (et est souvent noté (Ox)) et l'axe vertical l'axe des ordonnés (et est souvent noté (Oy)).

On dit qu'un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ est **orthonormé** (`[ortho-normé]`) si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions orthogonales (`[ortho-]`) et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de longueur 1 (`[-normé]`).

4 La courbe représentative d'une fonction

4.1 Définition

On se donne un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et une fonction f dont le domaine de définition est noté $\mathcal{D}_f$.

La *courbe représentative de la fonction* f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont de la forme $M(x,f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$ c'est à dire:

$$\mathcal{C}_f = \{(x,f(x)) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f\}$$

On dit alors que $y = f(x)$ est *l'équation de la courbe de* f.

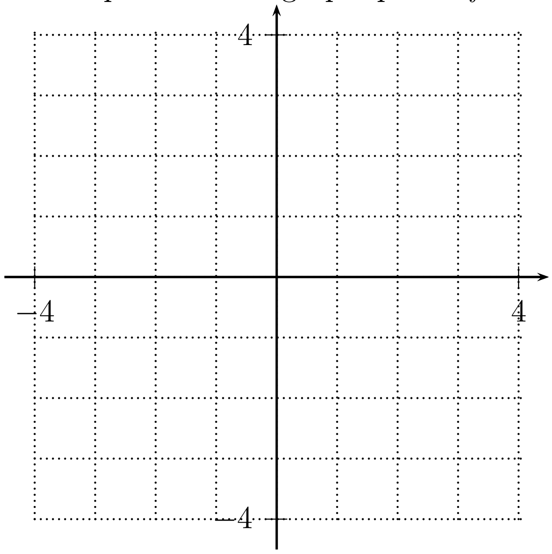
Remarque. Souvent on ne trace pas la courbe d'une fonction sur tout son domaine de définition.

Exercice 6 Après avoir rempli le tableau suivant, tracer (au mieux !) les courbes des fonctions $f(x) = \dfrac{x}{2}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - 2$ sur l'intervalle $[-4,4]$

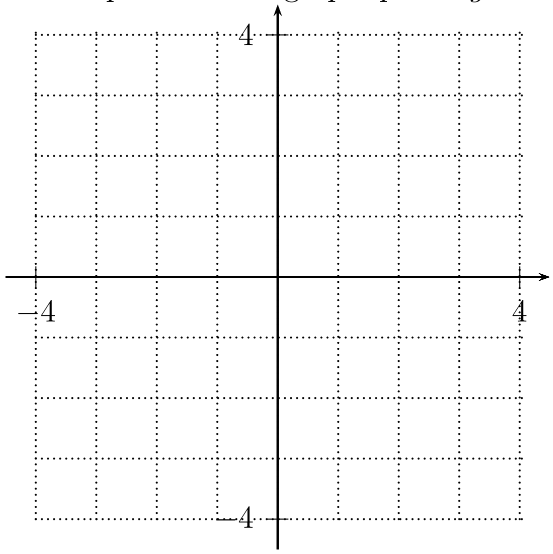
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									
$g(x)$									

[1]Les directions sont dites orthogonales lorsque les droites définissant les directions sont perpendiculaires

Représentation graphique de f

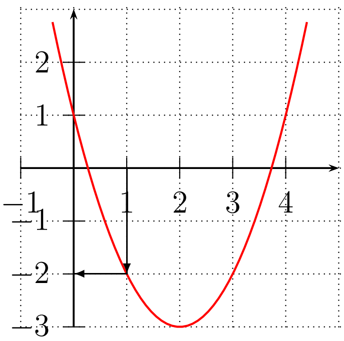


Représentation graphique de g



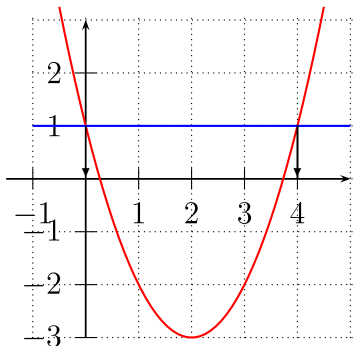
4.2 Lecture graphique

Lire l'image d'un nombre



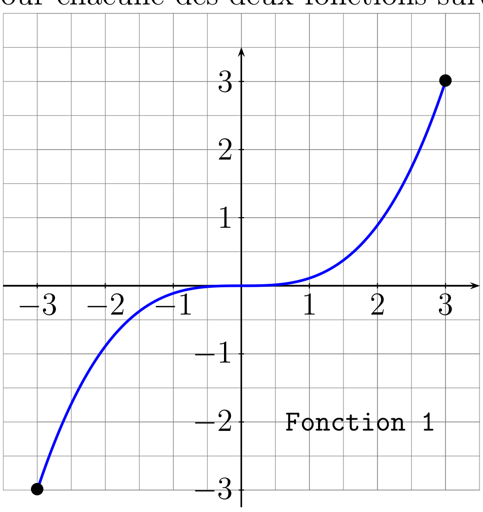
On place x sur l'axe des abscisses ;
On se déplace verticalement sur $\mathcal{C}_f$;
On lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées
L'image de 1 *par* f *est* -2

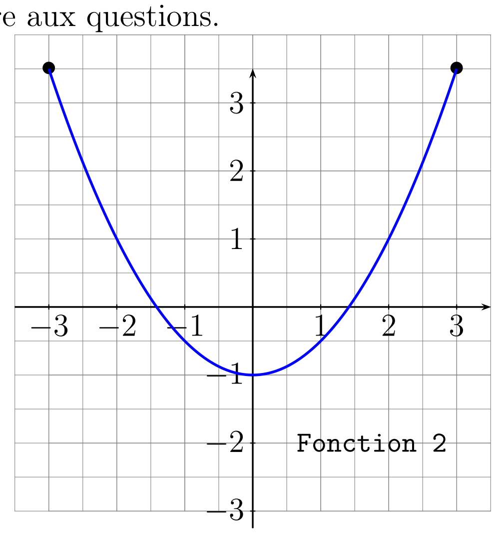
Trouver l'(les) antécédent(s) d'un nombre



On trace l'horizontale passant par cette valeur;
À partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents.
Les antécédents de 1 *par* f *sont* 0 *et* 4.

Exercice 7
Pour chacune des deux fonctions suivantes, répondre aux questions.





1. Quelle est l'image de 0 par chacune des deux fonctions ?

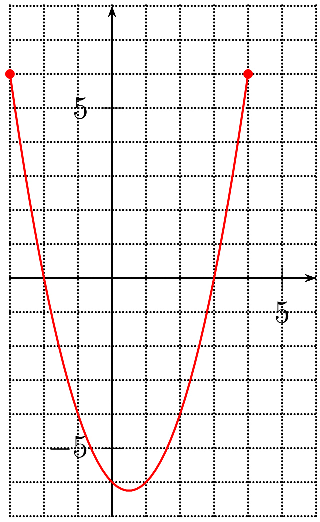
2. Dire pour chacune des deux fonctions quels nombres ont pour image 0. [c'est une lecture graphique donc pas exacte]

3. Donner la valeur de :

   (a) l'image de -2 par la fonction numéro 2.

   (b) l'image de 3 par la fonction numéro 1.

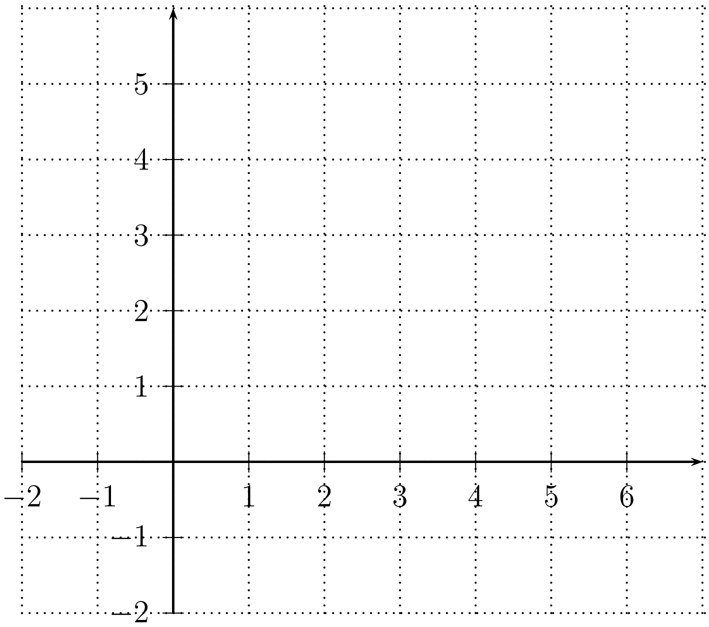
Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $[-3;4]$. Ci-contre, on donne $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.
Déterminer graphiquement :



1. la valeur de $f(0)$
2. les images de 3, de 4 et de-1 par f
3. les éventuels antécédents de -4, de 10 et de -6 par f
4. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4
5. les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 3$

Exercice 9

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentant une fonction f définie sur $[-1;6]$ vérifiant les contraintes suivantes :



- $f(-1) = 3$;
- l'image de 3 par f est 1;
- 2 est un antécédent de -1 par f;
- 5 est une solution de l'équation $f(x) = 6$;
- l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

1. Traduire chacune des cinq informations données sur f par une information sur $\mathcal{C}_f$.
2. Donner une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

5 Les variations d'une fonction

Soit f une fonction et soit un **intervalle** $I \subset \mathcal{D}_f$ (c'est à dire $f(x)$ existe pour tout $x \in I$).
La fonction f est dite

- **croissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$

  $\rightsquigarrow$ Au niveau graphique : la courbe monte

- **décroissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$

⇝ Au niveau graphique : la courbe descend

- **strictement croissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$

  ⇝ Au niveau graphique : la courbe monte sans stagner

- **strictement décroissante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$

  ⇝ Au niveau graphique : la courbe descend sans stagner

- **constante sur** I si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$

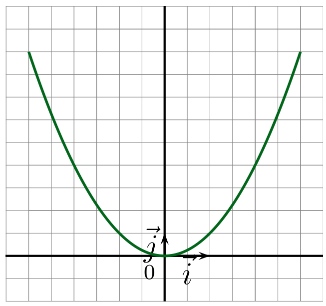
  ⇝ Au niveau graphique : la courbe est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Il est possible que la fonction f ne soit ni croissante ni décroissante sur I : elle peut être croissante sur un sous-intervalle de I et puis décroissante ou bien encore des situations plus compliquées ...
Par exemple : la fonction $f(x) = x^2$ est

- f est croissante sur $[0, 3]$;
- f est décroissante sur $[-3, 0]$;
- f n'est ni croissante ni décroissante sur $[-3, 3]$.

Afin de résumer les informations sur les variations de $f(x) = x^2$ (croissance/décroissance) sur $[-3, 3]$, il est commode d'utiliser un tableau de variation:

x	-3		0		3
variations de f	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	9



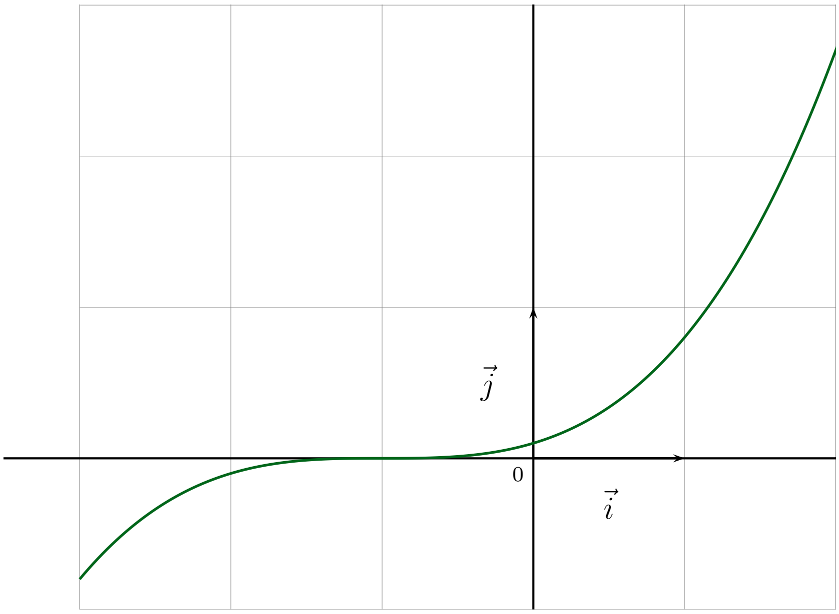
Un tableau de variations se construit comme un tableau de signe :

1. on découpe le domaine de définition de la fonction en intervalles (les plus grands possible) tel que la fonction soit croissante ou bien décroissante sur chacun des intervalles ;
2. quand elle croit on met une flèche montante et quand elle décroit une flèche descendante.

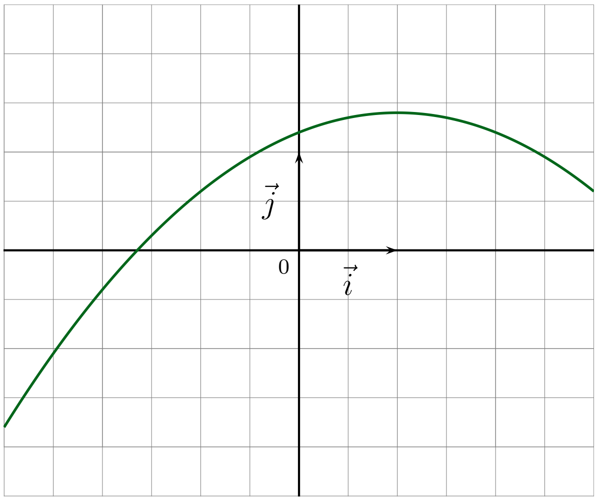
Monotonie. Lorsque f est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur un intervalle, on dit que f est **monotone** sur l'intervalle.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ est monotone sur $\mathbb{R}^+$ et est monotone sur $\mathbb{R}^-$ mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

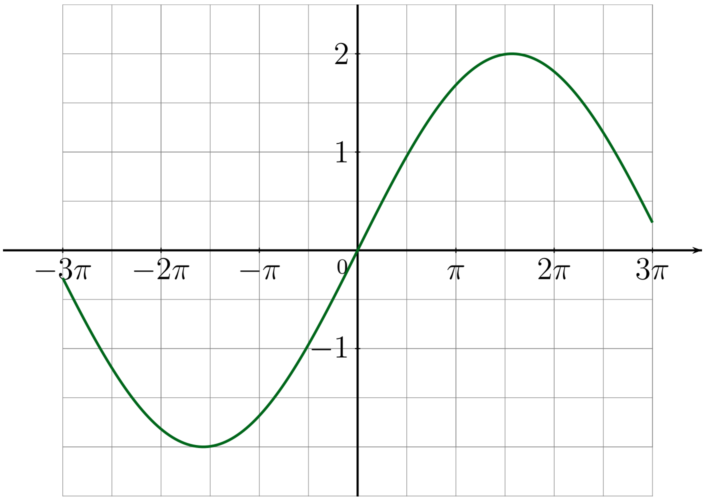
Exercice 10 À l'aide de la représentation graphique, établir *au mieux* le tableau de variation des fonctions suivantes



Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$

6 Fonctions usuelles

6.1 Les fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels.
Le nombre a est le *coefficient directeur* et le nombre b est *l'ordonnée à l'origine*.

Remarque. Dans le cas où $b = 0$, f est une *fonction linéaire* ; dans ce cas f représente une situation de **proportionnalité**.
Sens de variation. Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

1. Si $a = 0$, alors f est constante ;
2. Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
3. Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème.

- f est une fonction affine si et seulement si pour tous réels x_1 et x_2, le taux d'accroissement

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \text{ ne dépend pas de } x_1, x_2$$

  Plus précisément, si $f(x) = ax + b$ alors $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$.

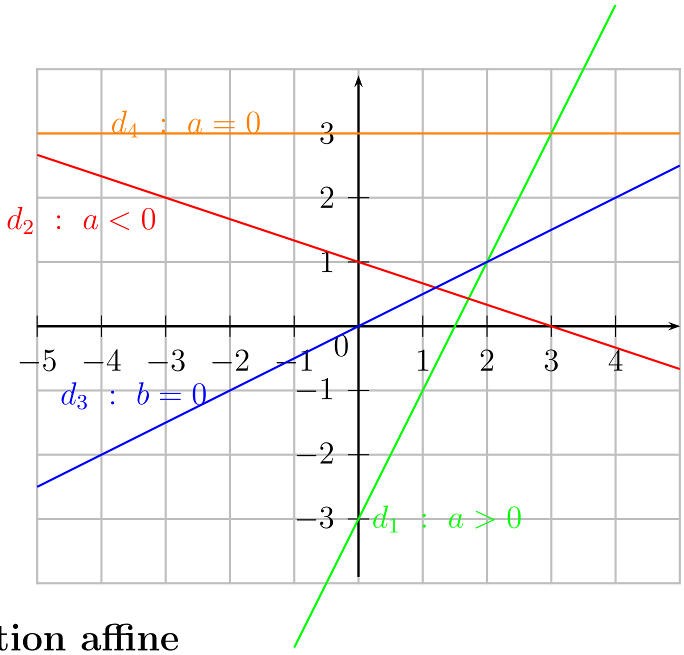
- f est une fonction affine si et seulement si sa représentation graphique est une droite [non verticale !]

- Pour tout $x_1 < x_2$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ il existe une unique fonction affine f telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

6.2 Représentation graphique

On a tracé ci-contre la représentation graphique des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x-3 \\ f_2(x) &= -\frac{1}{3}x+1 \\ f_3(x) &= \frac{1}{2}x \\ f_4(x) &= 3 \end{aligned}$$



6.3 Détermination d'une fonction affine

Déterminer la fonction affine f telle que $f(4) = 10$ et $f(-3) = -4$.
f est une fonction affine, il existe donc deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ pour tout x.

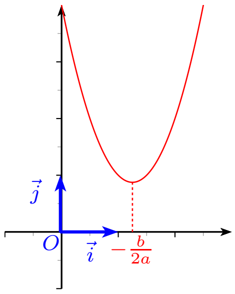
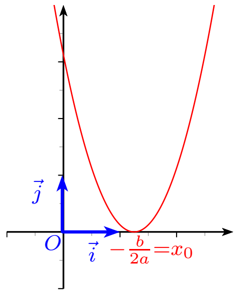
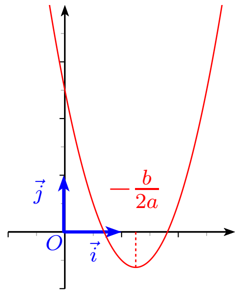
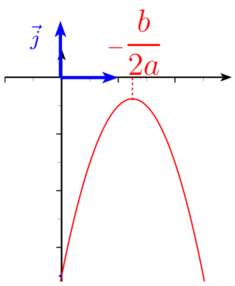
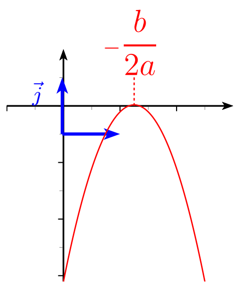
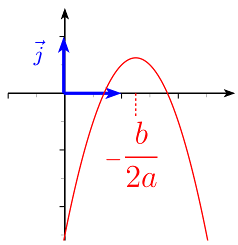
$$a = \frac{f(4)-f(-3)}{4-(-3)} = 2$$

Donc $f(x) = 2x + b$. De plus $f(4) = 10$ donc $2 \times 4 + b = 10$ d'où $b = 10 - 8 = 2$. On a alors $f(x) = 2x + 2$.

Exercice 11 Déterminer la fonction affine f telle que

1. $f(1) = 3$ et $f(7) = 14$
2. $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$
3. $f(-8) = 8$ et $f(8) = -8$
4. $f(2) = 5$ et $f(18) = 5$
5. $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$
6. $f(-3) = 2$ et $f(1) = -6$

6.4 le trinôme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racine(s) réelle(s) de P ?	Pas de racine réelle	Une seule racine réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux racines réelles **distinctes** $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $P(x)$?	Pas de factorisation	$P(x) = a(x - x_0)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Courbe représentative de P et signe de $P(x)$ lorsque $a > 0$ =Parabole avec la concavité en bas	 x: $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: $+$	 x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ $P(x)$: $+$ 0 $+$	 x: $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $P(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
Courbe représentative de P et signe de $P(x)$ lorsque $a < 0$ = Parabole avec la concavité en haut	 x: $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: $-$	 x: $-\infty$ x_0 $+\infty$ $P(x)$: $-$ 0 $-$	 x: $-\infty$ x_2 x_1 $+\infty$ $P(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Et on voit facilement que l'on a les variations suivantes:

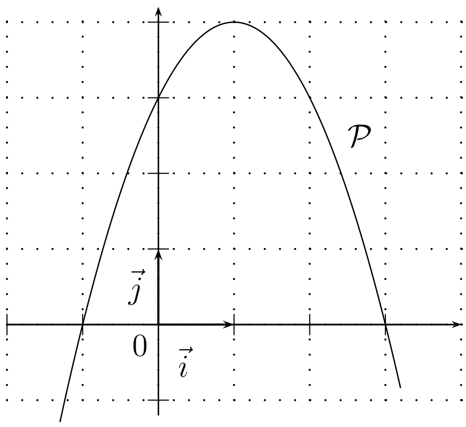
Si $a > 0$ alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variations de P	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Si $a < 0$ alors :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variations de P	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$

Exercice 12 [$\star$]



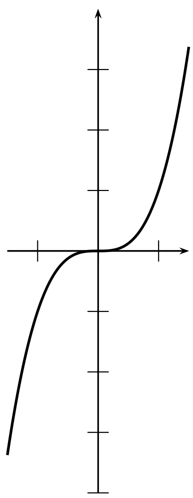
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ ci-contre.

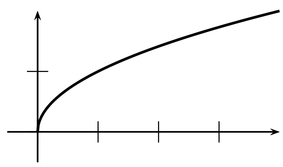
Exercice 13 $\star$ Pour chacune des conditions suivantes, déterminer **l'unique** fonction polynomiale $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions

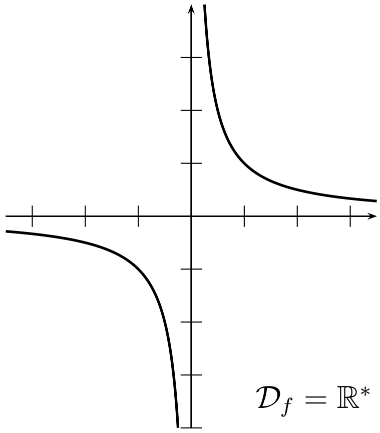
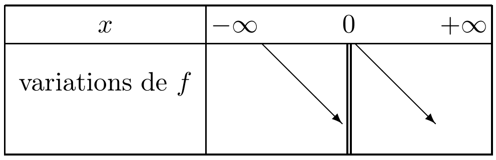
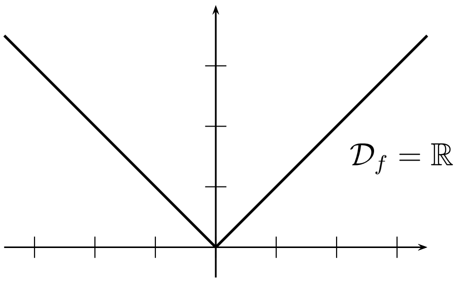
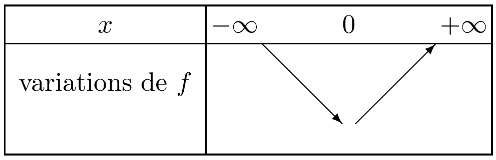
1. $P(1) = P(2) = 0$ et $P(3) = 2$
2. $P(1) = P(2) = P(3) = 0$
3. $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3$
4. $P(1) = P(2) = P(3) = 1$
5. 1 est l'unique racine de P et $P(2) = 3$ et $a \neq 0$.

6.5 Cube, racine, inverse, valeur absolue

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Représentation graphique</th><th>Variations</th></tr>
<tr><td>fonction cube :

$f(x) = x^3$</td><td>
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>variations de f</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>fonction
racine carrée :

$f(x) = \sqrt{x}$</td><td>
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>0 $+\infty$</td></tr><tr><td>variations de f</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Fonction	Représentation graphique	Variations
fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$		
fonction valeur absolue : $f(x) = \lvert x \rvert$		

Exercice 14 Après avoir déterminé le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, dresser leur tableau de variation :

1. $\dfrac{1}{x+1}$
2. $\dfrac{1}{(x+1)^2}$
3. $\sqrt{2x+1}$

7 Comparaison de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine D. On a :
$f = g$ si et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$;
$f \leq g$ si et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq g(x)$;
$f \geq g$ si et seulement si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq g(x)$.

Remarque. Contrairement à deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ où l'on peut toujours affirmer que $a \leq b$ ou bien $a \geq b$, pour deux fonctions f et g il est tout à fait possible que l'on ne puisse ni écrire $f \leq g$ ni $f \geq g$.

Interprétation graphique
$f \leq g$ signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est "en dessous" de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$
$f \geq g$ signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est "au dessus" de la courbe représentative $\mathcal{C}_g$

Majoré/Minoré/Borné
Une fonction f est dite :

- **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq m$.
- **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq M$.
- **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in I$ on a $m \leq f(x) \leq M$.