Université Paris Est Créteil
DAEU

Fiche 10
Taux d'accroissement–Dérivée–Variations d'une fonction

Dans cette fiche on découvre **l'outil** qui permet d'obtenir
de manière directe les variations d'une fonction !

1 Taux de variation

Un taux de variation (ou d'accroissement ou de croissance) exprime la variation d'un phénomène entre deux instants.
Ce taux se calcule par la formule suivante :

$$\text{Taux de variation} = \frac{\text{Variation phénomène}}{\text{Variation temps}}.$$

Exemple 1. Si on s'intéresse au déplacement d'une voiture entre deux moments t_1 et t_2, le taux de variation s'appelle plus communément la vitesse moyenne :

$$\text{Vitesse} = \frac{\Delta\text{position}}{\Delta\text{temps}}.$$

Exemple 2. Le taux d'accroissement de la population décrit le rythme d'augmentation annuel du nombre d'individus au sein d'une population. Ce taux est positif lorsque la population augmente et négatif lorsqu'elle diminue.

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{\Delta\text{population}}{\Delta\text{temps}}$$

Exercice 1 La France comptait $63,6$ millions d'habitants en 2007. Au 1er janvier 2011, nous sommes $65,8$ millions d'habitants.
Calculer le taux d'accroissement sur 4 ans de la population française.

Définition. En mathématiques, lorsqu'un phénomène est représenté par une fonction numérique f (définie sur un intervalle I), le taux de variation de f entre deux réels distincts $a, b \in I$ est le nombre réel m

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque. Le taux de variation de f entre a et b est à interpréter comme la "vitesse moyenne" de f entre a et b.

Exercice 2 Soit f définie par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Calculer le taux de variation entre 2 et 5.
Calculer le taux de variation entre -3 et -1.

2 La dérivée est la limite du taux de variation

Définition. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell,$$

ce qui revient à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell.$$

Le nombre ℓ est alors appelé le **nombre dérivé** de f en a.

Remarque. Le nombre dérivé est à interpréter comme la "vitesse instantanée" de f en a.

Définition. Si une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle, on peut définir sa fonction dérivée. Elle est noté f' (lire "f prime").

Remarque. *Généralement*, une fonction est dérivable sur son domaine de définition, sauf peut-être en quelques points. Par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais attention il y a des situations plus compliqué !

3 Propriétés usuelles

3.1 Opérations élémentaires

Fonctions de base pour le calcul des dérivées :

Type de fonction	dérivable sur	expression	dérivée
Fonction constante	$\mathbb{R}$	k	0
Fonction affine	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carré	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
Puissance de x	$\mathbb{R}$	$x^n\ (n>0)$	$n\,x^{n-1}$
Fonction inverse	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
Ra ine carrée	$\mathbb{R}_{+^*}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Règles de calcul des dérivées :

Opération	dérivable sur
Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Nombre a * Fonction u	$(a * u)' = a * u'$
Produit	$(u * v)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
Inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

N.B. : u et v sont deux fonctions dérivables.

Exercice 3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = 64$
3. $f(x) = 7x^2$
4. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
5. $f(x) = x^{19} - x^{13} + 5x^4$
6. $f(x) = (x+1)(x+1)$
7. $f(x) = 3\sqrt{x}$
8. $f(x) = \dfrac{5}{x}$
9. $f(x) = 5x - 7x + 8$

Exercice 4 $\star$ Deux mobiles M et N se déplacent sur un axe rectiligne d'origine O et d'unité 1 m. La position en fonction du temps t (en seconde) du point M est donnée par $\overline{OM} = f(t) = 100 - 5t$, et celle du point N par $\overline{ON} = g(t) = \frac{t^2}{2}$.
Quelles sont les vitesses des deux mobiles lorsqu'ils se rencontrent ?

3.2 Compositions

Propriété. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle D et f une fonction dérivable sur $g(D)$, alors $f \circ g$ est dérivable sur D et pour $x \in D$:

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \times g'(x).$$

En particulier, si $g(x) = ax + b$, alors on a

$$(f \circ g)'(x) = f'[ax + b] \times a.$$

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer

a. Leur domaine de définition.

b. L'expression de leur fonction dérivée et son domaine de définition.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 + 3x)(x + 1)$.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

Exercice 6 $\star$ Même question que l'exercice précédent pour les fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}}$.
2. f est la fonction définie par $f(x) = (x^2 + 3x)^2(x + 1)^3$.
3. f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x + 1}$.

4 Tangente d'une courbe en un point

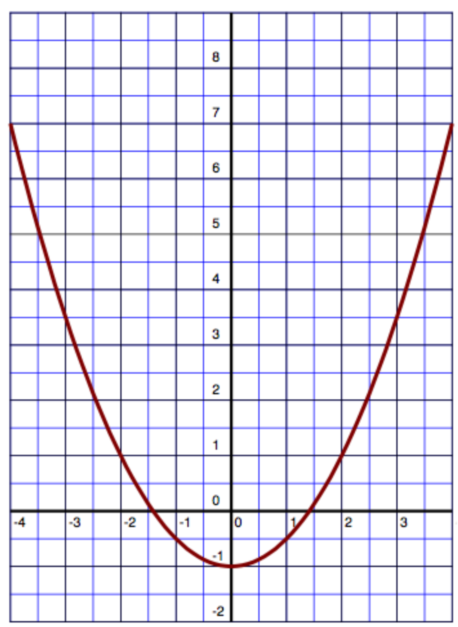
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit $x_0 \in I$, la *tangente à* $\mathcal{C}_f$ *en* x_0 est la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La tangente donne l'allure de la courbe autour du point x_0 : elle passe par le point $(x_0, f(x_0))$ avec la **même** "vitesse" que la courbe.

Exercice 7 Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1$.

1. Déterminer les équations des tangentes à cette courbe aux points d'abscisse $x_0 = -2$ et $x_0 = 3$.
2. Tracer ces tangentes.



5 Dérivée et variations d'une fonction

La dérivée d'une fonction f permet de déterminer le tableau de variation de f :

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I ;

En particulier si f' est identiquement nulle sur un intervalle I, alors f est constante sur I.

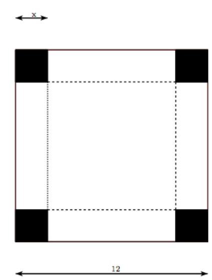
Exercice 8
Après avoir donné les domaines de définition des fonctions suivantes, dresser le tableau des variations de :

1. $f(x) = \sqrt{2x-6}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x-5}{4x+1}$

Exercice 9 Etudier les fonctions de l'exercice 9 : dresser leur tableau de variations et donner les limites aux bords de leur ensemble de définition.

Exercice 10

On enlève de chaque coin d'un carré de 12 cm de côté des petits carrés de x cm de côté, puis on plie le tout suivant les pointillés pour former une boîte ouverte. Exprimer son volume en fonction de x. Trouver la boîte de volume maximal.



6 Exercices

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+6}{(x+1)^2} - 2$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation complet de f.
4. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
5. Résoudre sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, l'inéquation $\dfrac{2x+6}{(x+1)^2} \leqslant 1$.

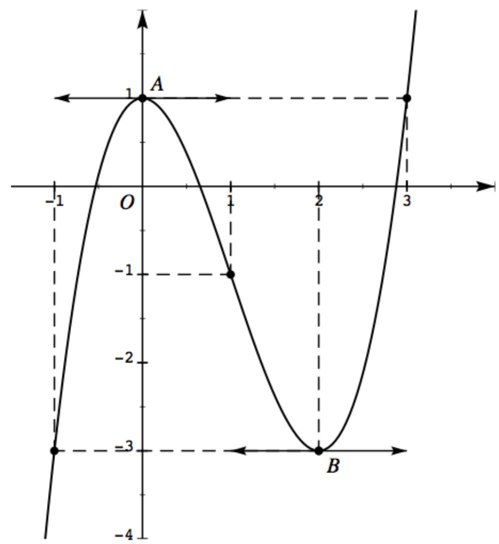
Exercice 12 On considère f, la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]2,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}.$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier la limite de f en 2^+. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe C_f.
3. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}.$$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]2, +\infty[$. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
5. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.
6. a) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$
   b) Montrer que la courbe C_f admet la droite Δ d'équation $y = x + 2$ pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
   c) Étudier la position de C_f par rapport à Δ.

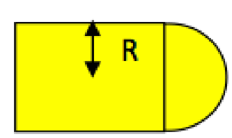
Exercice 13 Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère C_f, la représentation graphique de la fonction numérique f définie définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
où a, b, c et d sont des constantes réelles.
La représentation graphique de la courbe C_f est donnée ci-contre : [On précise qu'aux points A et B, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.]



1. À l'aide du graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer les valeurs des constantes a, b, c et d.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$
   a) Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Dresser le tableau complet des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On s'intéresse à un plateau d'une table dont le périmètre est 5. Ce plateau est représenté ci-contre. Sur ce schéma une variable R apparait. Cette variable correspond au rayon du demi-cercle formant le coté droit de la table. On note $f(R)$ la surface de la table en fonction de $R \in]0, \frac{5}{\pi + 2}[$.



1. Montrer que pour $R \in]0, \frac{5}{\pi+2}[$ on a $f(R) = -(\frac{\pi}{2} + 2)R^2 + 5R$.
2. Déterminer les variations de f sur $]0, \frac{5}{\pi+2}[$. En déduire la surface maximale de la table et pour quelle valeur de R atteint-on cette surface maximale.