Quelle est la dimension d'une mesure générique?

Frédéric Bayart

Université Clermont-Ferrand 2

Septembre 2013

Spectre des singularités d'une mesure

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ et soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$.

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) &= \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}_{-}(\mu; \alpha) &= \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\
E_{-}(\mu; \alpha) &= \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) = \alpha\}
\end{aligned}$$

Definition

On appelle **spectre des singularités** de μ la fonction $\alpha \mapsto \dim_{\mathcal{H}} \big(E_{-}(\mu; \alpha)\big)$.

On a toujours

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}_{-}(\mu; \alpha)) \leq \alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)].$$

Spectre des singularités d'une mesure

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ et soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$.

$$
\begin{aligned}
\underline{\dim}_{\text{loc}}(\mu; x) &= \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}_-(\mu; \alpha) &= \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\text{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\
E_-(\mu; \alpha) &= \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\text{loc}}(\mu; x) = \alpha\}
\end{aligned}
$$

Definition

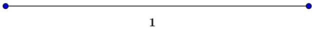
On appelle **spectre des singularités** de μ la fonction $\alpha \mapsto \dim_{\mathcal{H}} \big(E_-(\mu; \alpha)\big)$.

On a toujours

$$
\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}_-(\mu; \alpha)) \leq \alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)].
$$

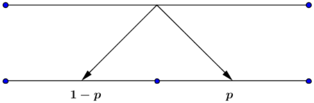
Quelques spectres - Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1/2]$.



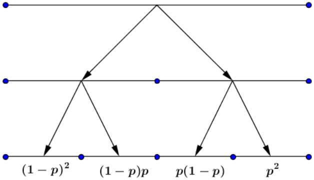
Quelques spectres - Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1/2]$.



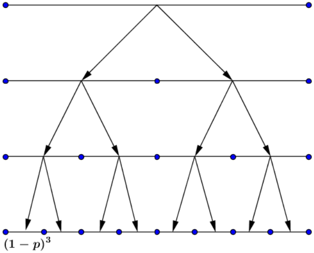
Quelques spectres - Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1/2]$.



Quelques spectres - Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1/2]$.



Plus formellement,

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

$$I_\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$\mu(I_\varepsilon) = p^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}(1-p)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)}.$$

$$h(t) = -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t).$$

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E_-(\mu;\alpha)\right) = h\left(\frac{\alpha+\log_2(1-p)}{\log_2(1-p)-\log_2(p)}\right).$$

Plus formellement,

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

$$I_\varepsilon = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right).$$

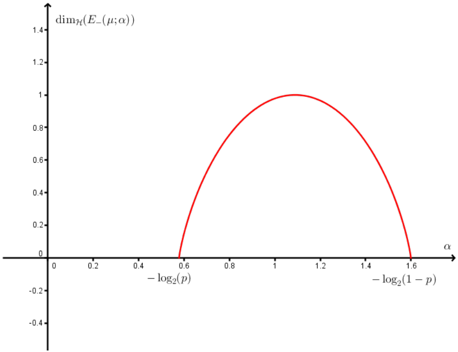
$$\mu(I_\varepsilon) = p^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n}(1-p)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)}.$$

$$h(t) = -t\log_2(t) - (1-t)\log_2(1-t).$$

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E_-(\mu;\alpha)\right) = h\left(\frac{\alpha+\log_2(1-p)}{\log_2(1-p)-\log_2(p)}\right).$$

Quelques spectres - Mesure de Bernoulli

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(E_-(\mu;\alpha)\right) = h\left(\frac{\alpha + \log_2(1-p)}{\log_2(1-p) - \log_2(p)}\right).$$



Mesures autosimilaires

Soient $S_1, \ldots, S_m$ des similarités de $\mathbb{R}^d$ de rapport respectif $r_1, \ldots, r_m \in]0,1[$. Soit E l'ensemble compact tel que $E = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$, et supposons de plus que $S_i(E) \cap S_j(E) = \varnothing$ pour $i \neq j$.
Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ un vecteur de probabilité. On définit une mesure μ sur E par

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

$S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)$ a pour diamètre $r_{i_1} \ldots r_{i_n}$ tandis que

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

Posons

$$\alpha_{\min} = \min_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}$$

$$\alpha_{\max} = \max_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}.$$

Mesures autosimilaires

Soient $S_1, \ldots, S_m$ des similarités de $\mathbb{R}^d$ de rapport respectif $r_1, \ldots, r_m \in]0,1[$. Soit E l'ensemble compact tel que $E = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$, et supposons de plus que $S_i(E) \cap S_j(E) = \varnothing$ pour $i \neq j$.
Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ un vecteur de probabilité. On définit une mesure μ sur E par

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

$S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)$ a pour diamètre $r_{i_1} \ldots r_{i_n}$ tandis que

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

Posons

$$\alpha_{\min} = \min_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}$$

$$\alpha_{\max} = \max_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}.$$

Mesures autosimilaires

Soient $S_1, \ldots, S_m$ des similarités de $\mathbb{R}^d$ de rapport respectif $r_1, \ldots, r_m \in]0,1[$. Soit E l'ensemble compact tel que $E = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$, et supposons de plus que $S_i(E) \cap S_j(E) = \varnothing$ pour $i \neq j$.
Soit $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ un vecteur de probabilité. On définit une mesure μ sur E par

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

$S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)$ a pour diamètre $r_{i_1} \ldots r_{i_n}$ tandis que

$$\mu\left(S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_n}(E)\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_n}.$$

Posons

$$\alpha_{\min} = \min_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}$$

$$\alpha_{\max} = \max_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}.$$

Mesures autosimilaires

$$\alpha_{\min} = \min_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}$$

$$\alpha_{\max} = \max_i \frac{\log(p_i)}{\log(r_i)}.$$

Pour $\alpha < \alpha_{\min}$ ou $\alpha > \alpha_{\max}$, on a

$$E_-(\mu;\alpha) = \left\{ x \in E;\ \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} = \alpha \right\} = \varnothing.$$

Sur $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $\alpha \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha))$ est une fonction concave.

Une mesure discrète

Soit $p \in]0, 1/2[$ et soit

$$\mu = a \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1,3,\ldots,2^n-1} p^n \delta_{k/2^n}.$$

Théorème (Aversa-Bandt)

Pour tout $\alpha \in [0, -\log_2(p)]$, $\dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu; \alpha)) = \alpha$. *Si* $\alpha > -\log_2(p)$, $\dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu; \alpha)) = 0$.

Quel est le spectre de singularités d'une mesure "générique" sur K ?

Une mesure discrète

Soit $p \in]0,1/2[$ et soit

$$\mu = a \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1,3,\dots,2^n-1} p^n \delta_{k/2^n}.$$

Théorème (Aversa-Bandt)

Pour tout $\alpha \in [0, -\log_2(p)]$, $\dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha$. Si $\alpha > -\log_2(p)$, $\dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = 0$.

Quel est le spectre de singularités d'une mesure "générique" sur K ?

Généricité

Soit $\mathrm{Lip}(K)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : K \to \mathbb{R}$ vérifiant $|f| \leq 1$ et $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$. On définit une distance L sur $\mathcal{P}(K)$ par

$$L(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}(K)} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$.

Lemme

- *$\mathcal{F}(K)$ est dense dans $\mathcal{P}(K)$;*
- *Pour tout $\gamma \in (0, 1)$, pour tout $\beta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout borélien $E \subset K$, pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$,*

$$L(\mu, \nu) < \eta \implies \mu(E) \leq \nu(E(\gamma)) + \beta,$$

où $E(\gamma) = \{x \in K;\ dist(x, E) < \gamma\}$.

Généricité

Soit $\mathrm{Lip}(K)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : K \to \mathbb{R}$ vérifiant $|f| \leq 1$ et $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$. On définit une distance L sur $\mathcal{P}(K)$ par

$$L(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}(K)} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$.

Lemme

- *$\mathcal{F}(K)$ est dense dans $\mathcal{P}(K)$;*
- *Pour tout $\gamma \in (0, 1)$, pour tout $\beta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout borélien $E \subset K$, pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$,*

$$L(\mu, \nu) < \eta \implies \mu(E) \leq \nu\big(E(\gamma)\big) + \beta,$$

où $E(\gamma) = \{x \in K;\ dist(x, E) < \gamma\}$.

Généricité

Soit $\mathrm{Lip}(K)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : K \to \mathbb{R}$ vérifiant $|f| \leq 1$ et $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$. On définit une distance L sur $\mathcal{P}(K)$ par

$$L(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}(K)} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$.

Definition

On dit qu'une propriété est générique dans $\mathcal{P}(K)$ si elle est vraie pour toutes les mesures dans une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Un ensemble contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses est appelé résiduel.

Résultats

Théorème (Buczolich-Nagy (2000))

Génériquement, une fonction continue et croissante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifie que, notant* $\mu_f([0,x]) = f(x) - f(0)$,

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \dim_{\mathcal{H}}\left(E_-(\mu_f;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (Buczolich-Seuret (2010))

Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}([0,1]^d)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,d],\ \dim_{\mathcal{H}}\left(E_-(\mu;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (B. 2013)

Soit K *une partie compacte de* $\mathbb{R}^d$*. Génériquement, une mesure* $\mu \in \mathcal{P}(K)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,\dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Résultats

Théorème (Buczolich-Nagy (2000))

Génériquement, une fonction continue et croissante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifie que, notant* $\mu_f([0,x]) = f(x) - f(0)$,

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \dim_{\mathcal{H}} \left(E_-(\mu_f;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (Buczolich-Seuret (2010))

Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}([0,1]^d)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,d],\ \dim_{\mathcal{H}} \left(E_-(\mu;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (B. 2013)

Soit K *une partie compacte de* $\mathbb{R}^d$. *Génériquement, une mesure* $\mu \in \mathcal{P}(K)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,\dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Résultats

Théorème (Buczolich-Nagy (2000))

Génériquement, une fonction continue et croissante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifie que, notant* $\mu_f([0,x]) = f(x) - f(0)$,

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \dim_{\mathcal{H}} \left(E_{-}(\mu_f;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (Buczolich-Seuret (2010))

Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}([0,1]^d)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,d],\ \dim_{\mathcal{H}} \left(E_{-}(\mu;\alpha)\right) = \alpha.$$

Théorème (B. 2013)

Soit K *une partie compacte de* $\mathbb{R}^d$. *Génériquement, une mesure* $\mu \in \mathcal{P}(K)$ *vérifie*

$$\forall \alpha \in [0,\dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Preuve - étape 1

Théorème (B. 2013)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Lemme

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et soit $s = \dim_{\mathcal{H}}(K)$. Il existe une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in (0,s)}$ de parties compactes de K satisfaisant

- $\forall \alpha \in (0, s)$, $0 < \mathcal{H}^\alpha(E_\alpha) < +\infty$;
- $\forall 0 < \alpha \leq \beta < s$, $E_\alpha \subset E_\beta$.

Plus tard,

$$E_\alpha = \mathcal{E}_-(\mu; \alpha).$$

Preuve - étape 1

Théorème (B. 2013)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Lemme

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et soit $s = \dim_{\mathcal{H}}(K)$. Il existe une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in (0,s)}$ de parties compactes de K satisfaisant

- $\forall \alpha \in (0, s)$, $0 < \mathcal{H}^\alpha(E_\alpha) < +\infty$;
- $\forall 0 < \alpha \leq \beta < s$, $E_\alpha \subset E_\beta$.

Plus tard,

$$E_\alpha = \mathcal{E}_-(\mu;\alpha).$$

Preuve - étape 2

Théorème (B. 2013)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$,

$$E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}.$$

Preuve - étape 2

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$,

$$E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}.$$

Une mesure : Soit $n \geq 1$. Il existe une famille $\mathcal{B}_n$ de boules de diamètre plus petit que 2^{-n}, recouvrant E, et telles que

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_n} |B|^\alpha \leq 2^{-(n+1)}.$$

Soit (ω_n) tendant vers l'infini tel que $\sum_{n\geq 1}\sum_{B\in\mathcal{B}_n}\omega_n|B|^\alpha = 1$. Pour $n \geq 1$ et $B \in \mathcal{B}_n$, soit $x_B \in E \cap B$. On pose

$$\mu_0 = \sum_{n\geq 1}\omega_n \sum_{B\in\mathcal{B}_n}|B|^\alpha \delta_{x_B}.$$

Preuve - étape 2

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$,

$$E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}.$$

Une mesure : $\mu_0 = \sum_{n\geq 1} \omega_n \sum_{B\in\mathcal{B}_n} |B|^\alpha \delta_{x_B}$.
Soit $x \in E$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $B \in \mathcal{B}_n$ tel que $x \in B$. Soit $r < 2^{-n}$ le rayon de B. Alors $B \subset B(x, 2r)$.

$$\mu_0\big(B(x,2r)\big) \geq \omega_n |B|^\alpha \geq (8r)^\alpha$$

dès que n est assez grand.

Preuve - étape 2

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$,

$$E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}.$$

Une partie dense de mesures : Soit $\nu \in \mathcal{F}(K)$ et soit $N \geq 1$. Posons

$$\mu_{\nu,N} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\nu + \frac{1}{N}\mu_0.$$

Avec les mêmes notations, pour $x \in E$,

$$\mu_{\nu,N}\big(B(x,2r)\big) \geq \frac{\omega_n}{N}|B|^\alpha \geq (8r)^\alpha$$

dès que n est assez grand.

Preuve - étape 2

Lemme

Soit $E \subset K$ *compact et soit* $\alpha > 0$. *Supposons que* $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. *Alors il existe une partie résiduelle* $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ *telle que, pour tout* $\mu \in \mathcal{R}_E$, $E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}$.

Une partie résiduelle de mesures : Plus précisément, pour tout $\nu \in \mathcal{F}(K)$, pour tout $N \geq 1$, pour tout $l \geq 1$, il existe $n \geq l$, il existe $\rho_n > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $r \in [\rho_n, 2^{-n}]$,

$$\mu_{\nu,N}\big(B(x,2r)\big) \geq (8r)^\alpha.$$

l, ν, N étant fixés, on peut trouver $\eta_{l,\nu,N} > 0$ tel que, si $L(\mu,\mu_{\nu,N}) < \eta_{l,\nu,N}$, alors

$$\mu\big(B(x,4r)\big) \geq (4r)^\alpha.$$

$$\mathcal{R}_E = \bigcap_{l\geq 1}\bigcup_{\nu,N} B_L(\mu_{\nu,N},\eta_{l,\nu,N}).$$

Preuve - étape 2

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$, $E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}$.

Une partie résiduelle de mesures : Plus précisément, pour tout $\nu \in \mathcal{F}(K)$, pour tout $N \geq 1$, pour tout $l \geq 1$, il existe $n \geq l$, il existe $\rho_n > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $r \in [\rho_n, 2^{-n}]$,

$$\mu_{\nu,N}\big(B(x,2r)\big) \geq (8r)^\alpha.$$

$l,\ \nu,\ N$ étant fixés, on peut trouver $\eta_{l,\nu,N} > 0$ tel que, si $L(\mu,\mu_{\nu,N}) < \eta_{l,\nu,N}$, alors

$$\mu\big(B(x,4r)\big) \geq (4r)^\alpha.$$

$$\mathcal{R}_E = \bigcap_{l\geq 1} \bigcup_{\nu,N} B_L(\mu_{\nu,N},\eta_{l,\nu,N}).$$

Preuve - étape 3

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$, $E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}$.

Démonstration.

Pour $\beta > \alpha$, $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$. Il existe donc un résiduel $\mathcal{R}_\beta$ tel que

$$\forall \mu \in R_\beta, E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\beta)$$

Soit (β_k) une suite qui décroit vers α. On pose

$$\mathcal{R}_E = \bigcap_k \mathcal{R}_{\beta_k}.$$

$\square$

Preuve - étape 3

Lemme

Soit $E \subset K$ compact et soit $\alpha > 0$. Supposons que $\mathcal{H}^\alpha(E) < +\infty$. Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{R}_E \subset \mathcal{P}(K)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}_E$, $E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\}$.

Démonstration.

Pour $\beta > \alpha$, $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$. Il existe donc un résiduel $\mathcal{R}_\beta$ tel que

$$\forall \mu \in R_\beta, E \subset \mathcal{E}_-(\mu;\beta)$$

Soit (β_k) une suite qui décroit vers α. On pose

$$\mathcal{R}_E = \bigcap_k \mathcal{R}_{\beta_k}.$$

$\square$

Conclusion

Théorème (B. 2013)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Soit $s = \dim_{\mathcal{H}}(K)$ et soit $(E_\alpha)_{0<\alpha<s}$ donné par le lemme. Soit (α_k) une partie dense de $]0, s[$. Pour chaque k, il existe un résiduel $\mathcal{R}_k$ tel que

$$\mu \in \mathcal{R}_k \implies E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}_{-}(\mu; \alpha_k).$$

Alors $\mathcal{R} = \bigcap_k \mathcal{R}_k$ convient.

Conclusion

$$\mu \in \mathcal{R}_k \implies E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha_k), \quad \mathcal{R} = \bigcap_k \mathcal{R}_k.$$

Soit $\mu \in \mathcal{R}$ et $\alpha \in (0,s)$. Alors

1. $E_\alpha \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha)$. En effet, si $(\alpha_{\phi(k)})$ décroît vers α, alors
$$E_\alpha \subset E_{\alpha_{\phi(k)}} \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha_{\phi(k)}).$$

2. On coupe E_α en $E_\alpha = E_\alpha^1 \cup E_\alpha^2$.
$$\begin{aligned} E_\alpha^1 &= \left\{x \in E_\alpha;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) = \alpha\right\} \\ E_\alpha^2 &= \left\{x \in E_\alpha;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) < \alpha\right\}. \end{aligned}$$
Mais $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha) > 0$ et $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha^2) = 0$. En effet,
$$E_\alpha^2 \subset \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_-(\mu;\beta).$$
Donc $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha^1) > 0$.

Conclusion

$$\mu \in \mathcal{R}_k \implies E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha_k), \quad \mathcal{R} = \bigcap_k \mathcal{R}_k.$$

Soit $\mu \in \mathcal{R}$ et $\alpha \in (0,s)$. Alors

1. $E_\alpha \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha)$. En effet, si $(\alpha_{\phi(k)})$ décroît vers α, alors

$$E_\alpha \subset E_{\alpha_{\phi(k)}} \subset \mathcal{E}_-(\mu;\alpha_{\phi(k)}).$$

2. On coupe E_α en $E_\alpha = E_\alpha^1 \cup E_\alpha^2$.

$$\begin{aligned} E_\alpha^1 &= \left\{x \in E_\alpha;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) = \alpha\right\} \\ E_\alpha^2 &= \left\{x \in E_\alpha;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) < \alpha\right\}. \end{aligned}$$

Mais $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha) > 0$ et $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha^2) = 0$. En effet,

$$E_\alpha^2 \subset \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_-(\mu;\beta).$$

Donc $\mathcal{H}^\alpha(E_\alpha^1) > 0$.

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{array}{rcl} \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) & = & \liminf_{r \to 0} \dfrac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\ \mathcal{E}_-(\mu; \alpha) & = & \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\ E_-(\mu; \alpha) & = & \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) = \alpha\} \\ \dim_{\mathcal{H}}\big(E_-(\mu;\alpha)\big) & \leq & \alpha \end{array}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}_-(\mu;\alpha) &= \{x\in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x)\le\alpha\} \\
E_-(\mu;\alpha) &= \{x\in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x)=\alpha\} \\
\dim_{\mathcal{H}}\big(E_-(\mu;\alpha)\big) &\le \alpha
\end{aligned}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu\in\mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall\alpha\in[0,\dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha))=\alpha.$$

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}^{+}(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\
E_{-}(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) = \alpha\} \\
\dim_{\mathcal{H}}\big(E_{-}(\mu;\alpha)\big) &\leq \alpha
\end{aligned}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}^{+}(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\
E^{+}(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) = \alpha\} \\
\dim_{\mathcal{H}}\big(E_{-}(\mu;\alpha)\big) &\leq \alpha
\end{aligned}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r} \\
\mathcal{E}^+(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \leq \alpha\} \\
E^+(\mu;\alpha) &= \{x \in K;\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) = \alpha\} \\
\dim_{\mathcal{P}}\left(E^+(\mu;\alpha)\right) &\leq \alpha
\end{aligned}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_-(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Et avec la dimension supérieure ?

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\rm loc}(\mu;x) &= \limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu\big(B(x,r)\big)}{\log r}\\
\mathcal{E}^+(\mu;\alpha) &= \{x\in K;\ \overline{\dim}_{\rm loc}(\mu;x)\le\alpha\}\\
E^+(\mu;\alpha) &= \{x\in K;\ \overline{\dim}_{\rm loc}(\mu;x)=\alpha\}\\
\dim_{\mathcal{P}}\big(E^+(\mu;\alpha)\big) &\le \alpha
\end{aligned}$$

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu\in\mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x\in K,\ \overline{\dim}_{\rm loc}(\mu;x)\ge\overline{\dim}_{B,{\rm loc}}(K)$$

où $\overline{\dim}_{B,{\rm loc}}(K)=\inf_{\substack{x\in K\\ \rho>0}}\overline{\dim}_B\big(K\cap B(x,\rho)\big)$.

Pourquoi ne peut-on pas espérer le même résultat ?

Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}&\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \le \alpha\}\\ =& \bigcap_{n\ge 1} \bigcup_{r\in(0,1/n)} \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} < \alpha + \frac{1}{n}\right\}.\end{aligned}$$

Mais...

$$\begin{aligned}&\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \le \alpha\}\\ =& \bigcup_{n\ge 1} \bigcap_{r\in(0,1/n)} \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} < \alpha + \frac{1}{n}\right\}.\end{aligned}$$

Pourquoi ne peut-on pas espérer le même résultat ?

Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} &\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\} \\ = &\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{r\in(0,1/n)} \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} < \alpha + \frac{1}{n}\right\}. \end{aligned}$$

Mais...

$$\begin{aligned} &\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) \leq \alpha\} \\ = &\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{r\in(0,1/n)} \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} < \alpha + \frac{1}{n}\right\}. \end{aligned}$$

Idée de la preuve

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$$

où $\overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K) = \inf_{\substack{x \in K \\ \rho > 0}} \overline{\dim}_B\big(K \cap B(x, \rho)\big)$.

Il suffit de démontrer que, pour tout $s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$, une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq s.$$

Soit $0 < s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$. Pour $m > l \geq 1$, on définit

$$\mathcal{U}_{l,m} = \big\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\big\}$$

Idée de la preuve

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$$

où $\overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K) = \inf_{\substack{x \in K \\ \rho > 0}} \overline{\dim}_B\big(K \cap B(x,\rho)\big)$.

Il suffit de démontrer que, pour tout $s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$, une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq s.$$

Soit $0 < s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$. Pour $m > l \geq 1$, on définit

$$\mathcal{U}_{l,m} = \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l) \ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\right\}$$

Idée de la preuve

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Génériquement, une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$$

où $\overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K) = \inf_{\substack{x \in K \\ \rho > 0}} \overline{\dim}_B\big(K \cap B(x, \rho)\big)$.

Il suffit de démontrer que, pour tout $s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$, une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie :

$$\forall x \in K,\ \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu; x) \geq s.$$

Soit $0 < s < \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K)$. Pour $m > l \geq 1$, on définit

$$\mathcal{U}_{l,m} = \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\right\}$$

$$\mathcal{U}_{l,m} = \big\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\big\}$$

Alors :

1. Une mesure $\mu \in \bigcap_l \bigcup_{m>l} \mathcal{U}_{l,m}$ convient.
2. Chaque $\mathcal{U}_{l,m}$ est ouvert.
3. Pour tout $l > 1$, $\bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$ est dense. Il suffit de démontrer qu'on peut approcher toute mesure finie $\mu = \sum_i p_i \delta_{x_i}$ par une mesure $\nu \in \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$.

$$\mathcal{U}_{l,m} = \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\right\}$$

Alors :

1. Une mesure $\mu \in \bigcap_l \bigcup_{m>l} \mathcal{U}_{l,m}$ convient.
2. Chaque $\mathcal{U}_{l,m}$ est ouvert.
3. Pour tout $l > 1$, $\bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$ est dense. Il suffit de démontrer qu'on peut approcher toute mesure finie $\mu = \sum_i p_i \delta_{x_i}$ par une mesure $\nu \in \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$.

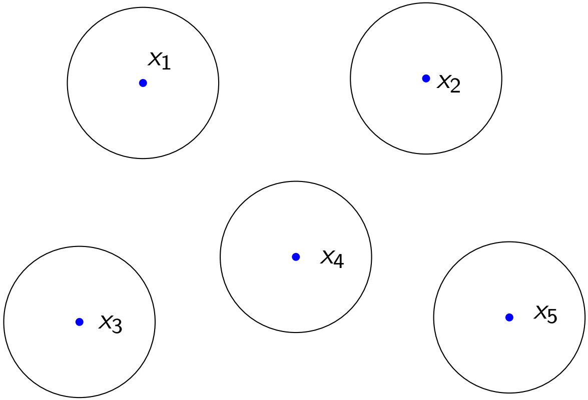
$$\mathcal{U}_{l,m} = \big\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\big\}$$

Alors :

1. Une mesure $\mu \in \bigcap_l \bigcup_{m>l} \mathcal{U}_{l,m}$ convient.
2. Chaque $\mathcal{U}_{l,m}$ est ouvert.
3. Pour tout $l > 1$, $\bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$ est dense. Il suffit de démontrer qu'on peut approcher toute mesure finie $\mu = \sum_i p_i \delta_{x_i}$ par une mesure $\nu \in \bigcup_{m\geq 1} \mathcal{U}_{l,m}$.

Soit $\mu = \sum_i p_i \delta_{x_i}$,

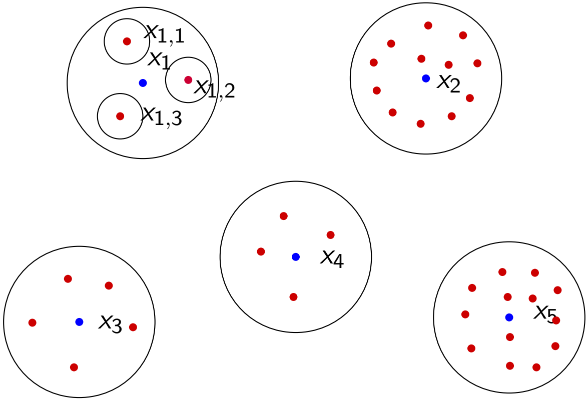
$\mathcal{U}_{l,m} = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l) \ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s \right\}$.



On pose $\nu = \sum_i p_i \sum_j \frac{1}{N_i} \delta_{x_{i,j}}$.

Soit $\mu = \sum_i p_i \delta_{x_i}$,

$\mathcal{U}_{l,m} = \left\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K,\ \exists r \in (1/m, 1/l)\ \text{ tel que } \mu\big(B(x,r)\big) < r^s\right\}.$



On pose $\nu = \sum_i p_i \sum_j \frac{1}{N_i} \delta_{x_{i,j}}$.

Retour au spectre supérieur linéaire

Théorème

Soit K un compact autosimilaire satisfaisant la "condition de l'ensemble ouvert", de dimension s. Alors il existe $\mu \in \mathcal{P}(K)$ tel que, pour tout $\alpha \in (0, s)$, on a

$$\dim_{\mathcal{P}}(E^+(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Lemme (C. Tricot)

Soit K un compact et $E \subset K$ tel que $\mathcal{P}^\alpha(E) < +\infty$. Alors il existe une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ tel que $E \subset \mathcal{E}^+(\mu; \alpha)$.

Retour au spectre supérieur linéaire

Théorème

Soit K un compact autosimilaire satisfaisant la "condition de l'ensemble ouvert", de dimension s. Alors il existe $\mu \in \mathcal{P}(K)$ tel que, pour tout $\alpha \in (0, s)$, on a

$$\dim_{\mathcal{P}}(E^{+}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Lemme (C. Tricot)

Soit K un compact et $E \subset K$ tel que $\mathcal{P}^{\alpha}(E) < +\infty$. Alors il existe une mesure $\mu \in \mathcal{P}(K)$ tel que $E \subset \mathcal{E}^{+}(\mu; \alpha)$.

Soit (E_α), $0 < \alpha < s$ une famille croissante de parties compactes de K telles que $0 < \mathcal{P}^\alpha(E_\alpha) < +\infty$. Soit (α_k) une suite dense dans $(0, s)$ et pour chaque k, μ_k une mesure telle que

$$E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}^+(\mu_k; \alpha_k).$$

Alors $\mu = \sum_k 2^{-k} \mu_k$ convient. On a en effet

$$E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}^+(\mu; \alpha_k)$$

d'où par densité et croissance

$$E_\alpha \subset \mathcal{E}^+(\mu; \alpha), \alpha \in (0, s).$$

On sépare ensuite E_α en deux parties, comme dans la démonstration précédente !

Soit (E_α), $0 < \alpha < s$ une famille croissante de parties compactes de K telles que $0 < \mathcal{P}^\alpha(E_\alpha) < +\infty$. Soit (α_k) une suite dense dans $(0, s)$ et pour chaque k, μ_k une mesure telle que

$$E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}^+(\mu_k; \alpha_k).$$

Alors $\mu = \sum_k 2^{-k} \mu_k$ convient. On a en effet

$$E_{\alpha_k} \subset \mathcal{E}^+(\mu; \alpha_k)$$

d'où par densité et croissance

$$E_\alpha \subset \mathcal{E}^+(\mu; \alpha), \alpha \in (0, s).$$

On sépare ensuite E_α en deux parties, comme dans la démonstration précédente !

Et avec d'autres formes de généricité ?

Soit X un espace vectoriel topologique et soit $C \subset X$ convexe complètement métrisable. Soit $E \subset C$ borélien et $c \in C$. On dit que E is *timide* dans C en c si, pour tout $\eta > 0$ et tout voisinage U de 0, il existe une mesure de probabilité Λ sur X telle que

1. $\mathrm{supp}(\Lambda)$ est compact et $\mathrm{supp}(\Lambda) \subset U + c$;
2. $\mathrm{supp}(\Lambda) \subset \eta C + (1 - \eta)c$;
3. pour tout $x \in E$, on a $\Lambda(x + E) = 0$.

Un borélien de C est dit *prévalent* si son complémentaire (dans C) est timide dans C en un point $c \in C$.

Résultats prévalents

Théorème
Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Une mesure prévalente $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)), \ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Théorème
Soit K une partie compacte autosimilaire de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la condition de l'ensemble ouvert. Une mesure prévalente $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{P}}(K)), \ \dim_{\mathcal{P}}(E^{+}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Résultats prévalents

Théorème

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Une mesure prévalente $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{H}}(K)),\ \dim_{\mathcal{H}}(E_{-}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Théorème

Soit K une partie compacte autosimilaire de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la condition de l'ensemble ouvert. Une mesure prévalente $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{P}}(K)),\ \dim_{\mathcal{P}}(E^{+}(\mu; \alpha)) = \alpha.$$

Et quand tout est égal ?

On dit que μ admet une dimension locale en x lorsque

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu;x) := \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x) = \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu;x).$$

On note

$$E(\mu;\alpha) = \{x \in K;\ \dim_{\mathrm{loc}}(\mu;x) = \alpha\}.$$

Théorème

Soit K une partie compacte autosimilaire de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la condition de l'ensemble ouvert. Une mesure prévalente $\mu \in \mathcal{P}(K)$ vérifie

$$\forall \alpha \in [0, \dim_{\mathcal{P}}(K)),\ \dim_{\mathcal{P}}(E(\mu;\alpha)) = \dim_{\mathcal{H}}(E(\mu;\alpha)) = \alpha.$$

Vers le formalisme multifractal...

Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$ et $q \neq 1$. La dimension L^q de μ est défini par

$$\underline{D}_\mu(q) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \int_K \left(\mu(B(x,r))\right)^{q-1} d\mu(x)}{\log r}.$$

La transformée de Legendre de $\underline{D}_\mu(q)$ est une borne supérieure pour le spectre de singularité de μ : pour tout $\alpha \geq 0$,

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(E_-(\mu;\alpha)\right) \leq (\underline{D}_\mu)^*(\alpha) =: \inf_{q \in \mathbb{R}} \left(q\alpha - \underline{D}_\mu(q)\right).$$

Dimension L^q générique

Théorème (Olsen 05,08)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Posons

$$\begin{aligned} s &= \overline{\dim}_B(K) \\ s_- &= \inf_{x\in K}\inf_{r>0}\underline{\dim}_B\big(B(x,r)\big). \end{aligned}$$

Alors une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ satisfait

1. $\underline{D}_\mu(q) = 0$ *si* $q > 1$ *;*
2. $-s(1-q) \le \underline{D}_\mu(q) \le -s_-(1-q)$ *si* $q \in [0,1[$ *;*
3. $\underline{D}_\mu(q) = -\infty$ *si* $q < 0$.

Corollaire

Une mesure générique de $\mathcal{P}(K)$ satisfait le formalisme multifractal.

Dimension L^q générique

Théorème (Olsen 05,08 - B. 2013)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Posons

$$
\begin{aligned}
s &= \overline{\dim}_B(K) \\
s_- &= \inf_{x\in K}\inf_{r>0}\underline{\dim}_B\big(B(x,r)\big).
\end{aligned}
$$

Alors une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ satisfait

1. $\underline{D}_\mu(q) = 0$ *si* $q > 1$ *;*
2. $\underline{D}_\mu(q) = -s(1-q)$ *si* $q \in [0,1[$ *;*
3. $\underline{D}_\mu(q) = -\infty$ *si* $q < 0$.

Corollaire

Une mesure générique de $\mathcal{P}(K)$ satisfait le formalisme multifractal.

Dimension L^q générique

Théorème (Olsen 05,08)

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. Posons

$$\begin{aligned} s &= \overline{\dim}_B(K) \\ s_- &= \inf_{x \in K} \inf_{r>0} \underline{\dim}_B\big(B(x,r)\big). \end{aligned}$$

Alors une mesure générique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ satisfait

1. $\underline{D}_\mu(q) = 0$ *si* $q > 1$;
2. $\underline{D}_\mu(q) = -s(1-q)$ *si* $q \in [0, 1[$;
3. $\underline{D}_\mu(q) = -\infty$ *si* $q < 0$.

Corollaire

Une mesure générique de $\mathcal{P}(K)$ satisfait le formalisme multifractal.

Une page de pub ! !

Du 21 au 23 octobre 2013, journées du GDR AFHP (Analyse Fonctionnelle, Harmonique, et Probabilités), organisées à l'Université Lyon 1.

Merci !

Une page de pub ! !

Du 21 au 23 octobre 2013, journées du GDR AFHP (Analyse Fonctionnelle, Harmonique, et Probabilités), organisées à l'Université Lyon 1.

Merci !

Un dernier résultat

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}_{*,B}(\mu) &= \inf_{\mu(E)>0} \underline{\dim}_B(E) \\
\underline{\dim}^*_B(\mu) &= \lim_{\varepsilon>0} \inf_{\mu(E)>1-\varepsilon} \underline{\dim}_B(E) \\
\overline{\dim}_{*,B}(\mu) &= \inf_{\mu(E)>0} \overline{\dim}_B(E) \\
\overline{\dim}^*_B(\mu) &= \lim_{\varepsilon>0} \inf_{\mu(E)>1-\varepsilon} \overline{\dim}_B(E).
\end{aligned}$$

Théorème (Myjak-Rudnicki, 2002)

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ *compact. Alors une mesure typique* $\mu \in \mathcal{P}(K)$ *satisfait*

$$\underline{\dim}_{*,B}(\mu) = \underline{\dim}^*_B(\mu) = 0$$

$$\overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K) \leq \overline{\dim}_{*,B}(\mu) \leq \overline{\dim}^*_B(\mu) \leq \overline{\dim}_B(K).$$

Un dernier résultat

$$\begin{array}{rcl}
\underline{\dim}_{*,B}(\mu) & = & \inf_{\mu(E)>0} \underline{\dim}_B(E) \\
\underline{\dim}_B^*(\mu) & = & \lim_{\varepsilon>0} \inf_{\mu(E)>1-\varepsilon} \underline{\dim}_B(E) \\
\overline{\dim}_{*,B}(\mu) & = & \inf_{\mu(E)>0} \overline{\dim}_B(E) \\
\overline{\dim}_B^*(\mu) & = & \lim_{\varepsilon>0} \inf_{\mu(E)>1-\varepsilon} \overline{\dim}_B(E).
\end{array}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B,loc,max}}(E) = \sup_{y\in E,\rho>0} \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}\big(E\cap B(y,\rho)\big).$$

Théorème

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact. Alors une mesure typique $\mu \in \mathcal{P}(K)$ satisfait

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\dim}_{*,B}(\mu) & = & \overline{\dim}_{B,\mathrm{loc}}(K) \\
\overline{\dim}_B^*(\mu) & = & \overline{\dim}_{\mathrm{B,loc,max}}(K).
\end{array}$$