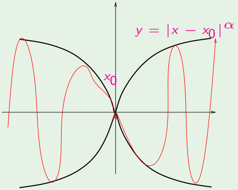
Propriétés multifractales d'une famille de fonctions parcimonieuse en ondelettes

C. Coiffard[1], C. Melot[2], T. Willer[2]

[1]**IRMA**, CNRS, Université de Strasbourg
[2]**LATP**, CNRS, , Aix-Marseille Université

23 septembre, 2013, Porquerolles

Exposant de Hölder ponctuel :



Définition :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et α un réel positif.
Une fonction localement bornée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est $C^\alpha(x_0)$ si il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_{x_0} de degré au plus $[\alpha]$ tel que dans un voisinage de x_0,

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \tag{1}$$

$\rightarrow$ L' exposant de Hölder ponctuel de f en x_0 est
$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$.

p-exposant

Définition : (Calderon et Zygmund 1961)

Soit $p \in [1, \infty]$et u un réel tel que $u \geq -\frac{d}{p}$. Soit f une fonction de L^p_{loc}.
La fonction f appartient à $T^p_u(x_0)$ s'il existe $R > 0$, P polynôme de degré inférieur ou égal à u, et $C > 0$ tel que

$$\forall \rho \leq R : \quad \left(\frac{1}{\rho^d} \int_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x) - P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^u. \tag{2}$$

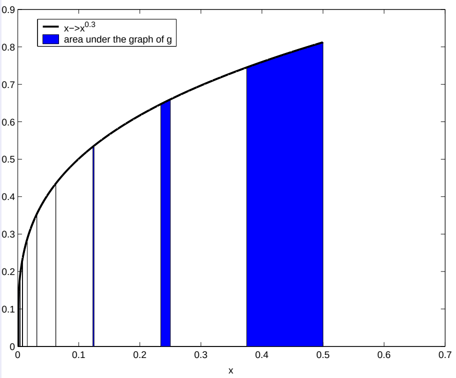
$\rightarrow$ Le p-exposant de f en x_0 est $u^p_f(x_0) = \sup\{u : f \in T^p_u(x_0)\}$

Propriétés basiques

- Si $p < q$ alors $u^p_f(x_0) \geq u^q_f(x_0)$.
- Si $f \in C^h(x_0)$ alors $u^p_f(x_0) \geq h$.
- Moins évident : les potentiels de Bessel $\mathcal{J}^\alpha$ sont continus de $T^p_u(x_0)$ sur $T^p_{u+\alpha}(x_0)$.

Exemple

$D_j = [1/2^j - 1/2^{3j}, 1/2^j]$, avec $j \geq 0$
$g(x) = |x|^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} I_{D_j}(x)$.
$h_g(0) = \alpha < u_g^p(0) = \alpha + 1/p$ pour chaque $p \geq 1$.



Objectif du travail

$\rightarrow$ Étudier une famille de fonctions dont la régularité ponctuelle au sens de chacun des deux exposants est différente, et multifractale pour chacun des deux exposants.
$\rightarrow$ Calculer en tout point l'exposant d'oscillation.
$\rightarrow$ Montrer qu'elle satisfait des formules du type "formalisme multifractal".

Le modèle de série d'ondelettes aléatoires développé par Jaffard (2000) présente le même type de propriétés (Jaffard 2011).

Description du modèle

Bases d'ondelettes

→ méthode numérique à base d'ondelettes apparue pour le calcul du formalisme multifractal (A.Arnéodo, 1991).

Soit ψ une ondelette telle que $(2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in Z)$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

- régulière, à support compact.
- oscillante, c'est à dire avec un certain nombre de moments nuls.
- on écrit $\lambda = (j,k) = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$ ce qui donne $\psi_\lambda = 2^{j/2}\psi(2^j . - k)$ et $c_\lambda = 2^{j/2}\int f(x)\psi_\lambda(x)dx$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$

inspiré de Jaffard (92)

- Indexé par deux paramètres $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$,
- $f(x) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda(\alpha,\beta)} 2^{-j(\gamma+1/2)}\psi_\lambda$ avec $\Lambda(\alpha,\beta) = \bigcup\limits_{m \geq 1} \Lambda_m(\alpha,\beta)$ tels que
  - $j = \alpha\beta m$
  - $\frac{k}{2^j} = \epsilon_1 \ell_1 + ... + \epsilon_{m-1}\ell_{m-1} + \epsilon_m \ell'_m$ avec $\epsilon_i = \pm 1$ et $\ell_i = 2^{-i}$ ainsi que $\ell'_i = 2^{-\alpha i}$
  - Si $\alpha\beta m < j < \alpha\beta(m+1)$ pour tout k $c_\lambda = 0$
  - Si $j = \alpha\beta m$ alors au plus 2^m coefficients ne s'annulent pas sur un total de $2^{\alpha\beta m}$ coefficients possibles.

Exposant d'oscillation

Primitive fractionnaire

Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact telle que $\phi(x_0) = 1$, et soit $(Id - \Delta)^{-t/2}$ l'opérateur de multiplication en Fourier par $(1 + |\xi|^2)^{-t/2}$.
On note $h_f^t(x_0)$ l'exposant de Hölder ponctuel en x_0 de la fonction $f^t = (Id - \Delta)^{-t/2}(\phi f)$.

exposant d'oscillation

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dans L^∞_{loc}. Si $h_f(x_0) \neq +\infty$, alors l'exposant d'oscillation de f en x_0 est défini par

$$\beta_f(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} h_f^t(x_0) \right)_{t=0} - 1 \tag{3}$$

(où la dérivée en $t = 0$ est en fait la dérivée à droite en x_0).

Exemple

La fonction $f(x) = |x|^\alpha \sin(1/|x|^\beta)$ vérifie $\beta_f(x_0) = \beta$

Point clé : taux d'approximation

Soit $x_0 \in [-1,1]$. $\mathcal{S}_\alpha$ l'ensemble des dyadiques tels que
$\mathcal{S}_\alpha = \{\frac{k'}{2^{j'}} \in [-1,1] : \quad \exists (j,k) \quad \frac{k'}{2^{j'}} = \frac{k}{2^{j-1}} \pm \frac{1}{2^{\alpha j}}, \quad \frac{k}{2^{j-1}} \text{ irréductible}\}$

- Soit $K_{j'}(x_0) = \text{argmin}_{k, k2^{-j'} \in \mathcal{S}_\alpha}(|x_0 - k2^{-j'}|)$
- avec $(j, k_{j-1}(x_0))$ tel que $\frac{K_{j'}(x_0)}{2^{j'}} = \frac{k_{j-1}(x_0)}{2^{j-1}} \pm \frac{1}{2^{\alpha j}}$ et $\frac{k_{j-1}(x_0)}{2^{j-1}}$ une fraction irréductible.
- $r_\alpha(x_0) = \limsup_{j' \to \infty} \frac{\log(|K_{j'}(x_0)2^{-j'} - x_0|)}{\log(2^{-j})}$,
- Conséquences :

$\rightarrow$ $r_\alpha(x_0) \geq 1$.

$\rightarrow$ $|K_{j'}(x_0)2^{-j'} - x_0| \sim 2^{-jr_\alpha(x_0)}$.

- La dimension de Hausdorff de $E_r = \{x_0 : \ r_\alpha(x_0) = r\}$ est exactement $\frac{1}{r}$ (par exemple grâce à Durand (2008))

Résultat

Théorème :

Soit $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ et $\gamma > 0$, avec α, β entiers. Soit $p \geq 1$. Soit $x_0 \in [-1, 1]$.

- Supposons $r_\alpha(x_0) < \alpha\beta$ (pour $\alpha > 1$ ou $\beta > 1$) alors $h_f(x_0) = \frac{\alpha\beta\gamma}{r_\alpha(x_0)}$, $\beta_f(x_0) = \frac{\alpha\beta}{r_\alpha(x_0)} - 1$ et $u_f^p(x_0) = \frac{\alpha\beta\gamma}{r_\alpha(x_0)} + \left(\frac{\alpha\beta}{r_\alpha(x_0)} - 1\right)\frac{1}{p}$
- Supposons $r_\alpha(x_0) = \alpha\beta$ alors $h_f(x_0) = \gamma$, $\beta_f(x_0) = 0$ et $u_f^p(x_0) = \gamma$.
- Supposons $r_\alpha(x_0) > \alpha\beta$ alors $h_f(x_0) = \alpha\beta\gamma$, $\beta_f(x_0) = \alpha\beta - 1$ et $u_p^f(x_0) = \alpha\beta\gamma + \frac{\alpha\beta-1}{p}$.
- f vérifie une formule du type formalisme multifractal et son spectre de singularités est donné par $d_f(h) = \frac{h}{\alpha\beta\gamma}\ \mathbf{1}_{[\gamma, \alpha\gamma\beta]}(h)$.
- f vérifie une formule du type formalisme multifractal pour le p exposant et son spectre de singularités est donné par $d_f^{(p)}(u) = \frac{(u+\frac{1}{p})}{\alpha\beta(\gamma+\frac{1}{p})}\ \mathbf{1}_{[\gamma, \alpha\beta\gamma+\frac{\alpha\beta-1}{p}]}(u)$.

Exposant d'oscillation de f

Calcul de f^t

On a $f^t = \sum_{\lambda \in \Lambda(\alpha,\beta)} c_\lambda^t \psi_\lambda^t$ avec

- ψ^t l'intégrée fractionnaire de ψ
- $\{\psi_\lambda^t = 2^{j/2}\psi^t(2^j. - k)\}$
- $c_\lambda^t = 2^{-j(\gamma+t+\frac{1}{2})}$ si $\lambda \in \Lambda(\alpha, \beta)$ et 0 sinon.

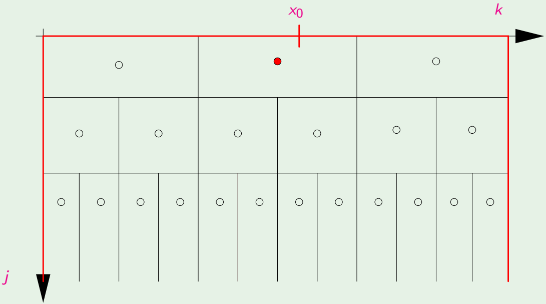
- Dès qu'on connait $h_f(x_0)$ on remplace γ par $\gamma + t$: on obtient $h_f^t(x_0)$
- On calcule la limite de la dérivée de $h_f^t(x_0)$ en 0.

Coefficients dominants

(Jaffard 2004)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.
Supposons que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$. Soit $d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \subset 3.\lambda_j(x_0)} |2^{j'/2} c_{\lambda'}|$ alors

$$h_f(x_0) = \liminf_{j \to \infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})}$$

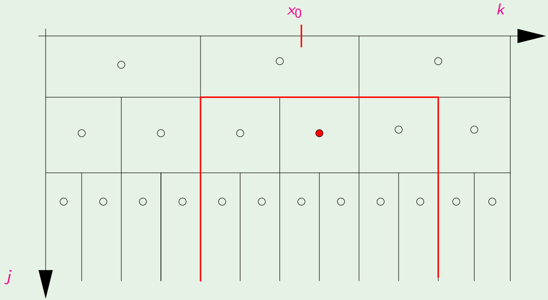


Coefficients dominants

(Jaffard 2004)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.
Supposons que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$. Soit $d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \subset 3.\lambda_j(x_0)} |2^{j'/2} c_{\lambda'}|$ alors

$h_f(x_0) = \liminf_{j \to \infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})}$



p-coefficients dominants

(Jaffard-M. 2005)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$.
Supposons que $f \in B_p^{\delta,p}$.
Soit $D_{j,p}(x_0) = \left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} |c'_\lambda|^p 2^{j'(\frac{p}{2}-1)}\right)^{1/p}$, alors $u_f^p(x_0) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log(d_{j,p}(x_0))}{\log(2^{-j})} - \frac{1}{p}$.

(Jaffard 2004)

Soit $S_f(j,x_0)(x) = \sqrt{\sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} 2^{j'} c^2_{\lambda'} \chi_{\lambda'}(x)}$ alors $u_f^p(x_0) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log(\|S_f(j,x_0)\|_p)}{\log(2^{-j})} - \frac{1}{p}$

Autre point-clé

Calcul des coeffficients dominants

Soit $p \geq 1$. On note $ap = \gamma p + 1$. Soit λ un cube dyadique indexé par (j,k). On veut calculer $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset \lambda} |2^{j'/2} c_{\lambda'}|$ et $D_{\lambda,p} = (\sum_{\lambda' \subset \lambda} |c'_\lambda|^p 2^{j'(\frac{p}{2}-1)})^{1/p}$.

Soit m_0 tel que $\alpha\beta(m_0 - 1) < j \leq \alpha\beta m_0$ et m_1 tel que $\alpha(m_1 - 1) \leq j < \alpha m_1$.
On a $m_0 \leq m_1$.
On va avoir 3 cas

1. soit $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^{m-1}} \pm \frac{1}{2^{\alpha m}}$ avec $m \geq m_0$.
   - Alors $m_0 \leq m \leq m_1 - 1$, car $m\alpha \leq j$.
   - Donc $d_\lambda = 2^{-\beta\gamma(\alpha m)}$
   - $C' 2^{-a\alpha\beta m} \leq D_{\lambda,p} \leq C 2^{-a\alpha\beta m}$
2. soit $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^{m'}}$ est une fraction irréductible (non du premier type) avec $m' < m_1$. Alors le premier coefficient non nul arrive en $\frac{K}{2^{m'-1}} + \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{\alpha(j+1)}}$. Donc $d_\lambda = 2^{-\alpha\beta\gamma(j+1)}$ et $D_{\lambda,p} = C 2^{-a\alpha\beta(j+1)}$.
3. Soit $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^{m'}}$ est une fraction irréductible et $m' \geq m_1$. Alors $d_\lambda = 2^{-\alpha\beta\gamma m'}$ et $D_{\lambda,p} = (2^{-ap\alpha\beta m'} + C 2^{-ap\alpha\beta j})^{1/p}$.

Méthode

On partitionne $[-1,1]$ grâce aux ensembles $\{r_\alpha(x_0) = r\}$.
Pour chacune des valeurs de $r_\alpha(x_0)$ on regarde quels cas interviennent dans le calcul de

Formalisme multifractal

Jaffard (2004)

Soit $S_f(q,j) = 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^q$ avec $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset \lambda} |2^{j'/2} c_{\lambda'}|$.

Calculons $S_f(q,j)$ pour $j \to +\infty$ avec l'aide de la fonction d'échelle f définie par

$$\eta_f(q) = \liminf_{j \to +\infty} \left(\frac{\log\left(S_f(q,j)\right)}{\log(2^{-j})} \right); \tag{4}$$

le formalisme multifractal affirme $d_f(h) = \inf_q (hq - \eta_f(q) + 1)$

Jaffard-M (2005)

Soit le p-coefficient dominant : $D_{\lambda,p} = \left(\sum_{\lambda' \subset \lambda} 2^{(p/2-1)j'} |c_{\lambda'}|^p \right)^{1/p}$. Définissons $S_f^{(p)}(q,j) = 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |D_{\lambda,p}|^q$

On estime $S_f^{(p)}(q,j)$ quand $j \to +\infty$ et on calcule $\eta_f^{(p)}(q) = \liminf_{j \to +\infty} \left(\frac{\log\left(S_f^{(p)}(q,j)\right)}{\log(2^{-j})} \right)$;

Le formalisme multifractal pour le p-exposant affirme

$$d_f^{(p)}(u) = \inf_q (uq - \eta_f^{(p)}(q) + 1),$$

Application à f

Remarque pour le calcul

Soit une échelle j donnée. On pose $m_0 = \lceil \frac{j}{\alpha\beta} \rceil$ et $m_1 = \lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor$. On va donc compter méthodiquement chaque type de fraction irréductible qui intervient dans le calcul des d_λ à l'échelle j.