De la marche aléatoire persistante vers le processus du télégraphe.

Cénac, Chauvin, Herrmann, Vallois

Université de Bourgogne

28 *mars* 2012

Plan de l'exposé

1. Introduction : ajouter de la mémoire dans les modèles stochastiques
2. Mémoire de courte durée : marches aléatoires persistantes et comportement asymptotique
3. Processus du télégraphe (processus déterministe par morceaux). Propriétés.
4. Mémoire de longueur variable et processus déterministes par morceaux.

La plupart des modèles stochastiques appliqués à la finance ou à l'assurance partent du principe d'absence de mémoire tant pour les événements observés que pour l'action d'agents sur les marchés.
La plupart des modèles sont markoviens.

Dans la pratique, les événements (les sinistres, par exemple) et le comportement des acteurs sont des événements présentant une corrélation temporelle.

Deux exemples:

- Telesca et Lovallo (Physica A, 2006) *Are global terrorist attacks time-correlated ?* Recrudescences d'agressions ou acalmies.
- *persistant economic fears keep investors on edge* Fin. Times, 2008.

Possibilités: 1) garder un modèle markovien qui de temps en temps change de classe de risques.
2) introduire de la mémoire dans les modèles pour appréhender la persistance inhérente au sous-jacent.

Le point de départ...

On considère sans doute le modèle additif markovien le plus simple (sans être trivial) en temps discret: la marche aléatoire symétrique.

- Ses accroissements $(Y_n,\ n \geq 0)$ sont définis dans $\{-1, 1\}$, sont indépendants et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/2$.
- On définit la marche

  $$X_t = \sum_{n=0}^{t} Y_n, \quad t \in \mathbb{N}_+.$$

  Le processus est sans mémoire.
- Le changement d'échelle classique permet d'obtenir un processus stochastique en temps continu markovien: le mouvement brownien $(\Delta_x \to 0)$.

  $$Z_s^{\Delta} = \Delta_x X_{s/\Delta_T}, \quad \Delta_T = \Delta_x^2$$

  Le processus interpolé: $(\widetilde{Z}_s^{\Delta},\ s \geq 0)$ converge en loi vers $(W_s,\ s \geq 0)$.

Un modèle à mémoire courte

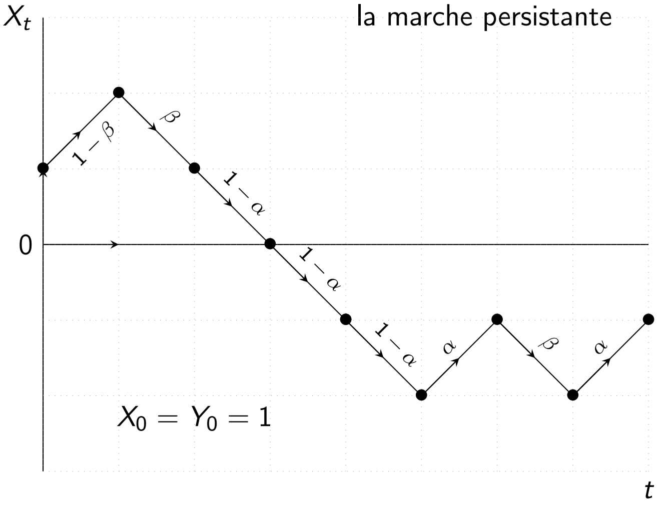
Définition d'une marche aléatoire persistante dont la mémoire est de longueur 1:

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} Y_i, \quad t \in \mathbb{N}_+.$$

Les accroissements (Y_t) forment une chaîne de markov de probabilité de transition

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

- si $\alpha + \beta = 1$, les accroissements sont indep. (sans mémoire)
- le cas symétrique: $\alpha = \beta$ a été étudié (description de la loi de X_t) par Fürth ('20) Taylor ('21) Goldstein ('51) Weiss ('94, "02)


X_t
la marche persistante
$1-\beta$
β
$1-\alpha$
0
$1-\alpha$
$1-\alpha$
α
β
α
$X_0 = Y_0 = 1$
t

La *persistance* (qui provient d'une mémoire à court terme) a une influence non négligeable sur le processus à long terme (Vallois & Tapiero "07):

$$\mathbb{E}_{+1}[X_t] := \mathbb{E}[X_t | X_0 = Y_0 = +1] = \frac{\alpha - \beta}{1 - \rho}(t+1) - \frac{2\beta}{(1-\rho)^2}(1 - \rho^{t+1}).$$

avec $\rho = 1 - \alpha - \beta$. Fonction génératrice: $\Phi(\lambda, t) = \mathbb{E}_{+1}[\lambda^{X_t}], \quad (\lambda > 0)$.

Proposition

La fonction génératrice satisfait

$$\Phi(\lambda, t) = a_+ \theta_+^t + a_- \theta_-^t \quad \text{avec} \quad \theta_\pm = \frac{1}{2}\Big(\frac{1-\alpha}{\lambda} + (1-\beta)\lambda \pm \sqrt{\mathcal{D}}\Big),$$

$$\mathcal{D} = \Big(\frac{1-\alpha}{\lambda} + (1-\beta)\lambda\Big)^2 - 4(1-\alpha-\beta)$$

$$a_+ = \frac{(1-\beta)\lambda^2 + \beta - \lambda\theta_-}{\sqrt{\mathcal{D}}} \qquad \text{et} \quad a_- = \lambda - a_+.$$

Idée de preuve: la fonction génératrice est déterminée grâce à la décomposition

$$\Phi(\lambda, t) = \Phi_-(\lambda, t) + \Phi_+(\lambda, t),$$

où $\Phi_-(\lambda, t) = \mathbb{E}[\lambda^{X_t} 1_{\{Y_t=-1\}}]$ et $\Phi_+(\lambda, t) = \mathbb{E}[\lambda^{X_t} 1_{\{Y_t=1\}}]$.

➠ **solution du système:**

$$\begin{cases} \Phi_-(\lambda, t+1) = \frac{1-\alpha}{\lambda}\, \Phi_-(\lambda, t) + \frac{\beta}{\lambda}\, \Phi_+(\lambda, t) \\ \Phi_+(\lambda, t+1) = \alpha\lambda\Phi_-(\lambda, t) + (1-\beta)\lambda\Phi_+(\lambda, t) \end{cases}$$

- La distribution marginale du processus $(X_t,\ t \in \mathbb{N})$ dépend fortement de la mémoire courte de ses accroissements.
- Cette mémoire est elle encore présente dans la dynamique du processus limite (changement d'échelle) ?

$$Z_s^{\Delta} = \Delta_x X_{s/\Delta_T}$$

Procédure de changement d'échelle

Soit $(Y_t,\, t \in \mathbb{N})$ une CM de transition

$$\pi^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_0 - c_0\Delta_x & \alpha_0 + c_0\Delta_x \\ \beta_0 + c_1\Delta_x & 1 - \beta_0 - c_1\Delta_x \end{pmatrix}.$$

Soit $(X_t,\ t \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire d'accroissements (Y_t) et $(Z_s^{\Delta},\, s \in \Delta_T\mathbb{N})$ le processus renormalisé

$$Z_s^{\Delta} = \Delta_x X_{s/\Delta_T}, \quad (\Delta_T > 0,\ \Delta_x > 0).$$

On notera $(\tilde{Z}_s^{\Delta},\, s \geq 0)$ l'interpolation linéaire de Z^{Δ}.

- Quel est le processus limite lorsque Δ_T et Δ_x tendent vers 0 ?
- deux paramètres: le coefficient d'asymétrie $\rho_0 = 1 - \alpha_0 - \beta_0$ et $\eta_0 = \beta_0 - \alpha_0$.

Premier cas: le coefficient d'asymétrie est différent de 1

Si $\rho_0 = 1 - \alpha_0 - \beta_0 \neq 1$ alors la limite par changement d'échelle fait *disparaître* la mémoire: la processus limite est markovien.

1. Si $r\Delta_T = \Delta_x$ avec $r > 0$. Alors $(\tilde{Z}_t^{\Delta},\ t \geq 0) \to -\frac{rt\eta_0}{1-\rho_0}$.
2. Si $r\Delta_T = \Delta_x^2$ avec $r > 0$, alors $(\xi_t^{\Delta},\ t \geq 0)$ defini par

$$\xi_t^{\Delta} = \tilde{Z}_t^{\Delta} + \frac{t\sqrt{r}\eta_0}{(1-\rho_0)\sqrt{\Delta_T}}$$

converge en loi vers $(\xi_t^0,\ t \geq 0)$, quand $\Delta_x \to 0$, où

$$\xi_t^0 = 2r\left(\frac{-\overline{\tau}}{1-\rho_0} + \frac{\eta_0\tau}{(1-\rho_0)^2}\right)t + \sqrt{\frac{r(1+\rho_0)}{1-\rho_0}\left(1 - \frac{\eta_0^2}{(1-\rho_0)^2}\right)}W_t,$$

avec $\tau = (c_0 + c_1)/2$ et $\overline{\tau} = (c_1 - c_0)/2$.

Second cas: le coefficient d'asymétrie est égal à 1

$\alpha_0 = \beta_0 = 0$, dans ce cas, les transitions sont données par

$$\pi^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 - c_0\Delta_x & c_0\Delta_x \\ c_1\Delta_x & 1 - c_1\Delta_x \end{pmatrix} \quad (c_0, c_1 > 0).$$

Théorème (2010)

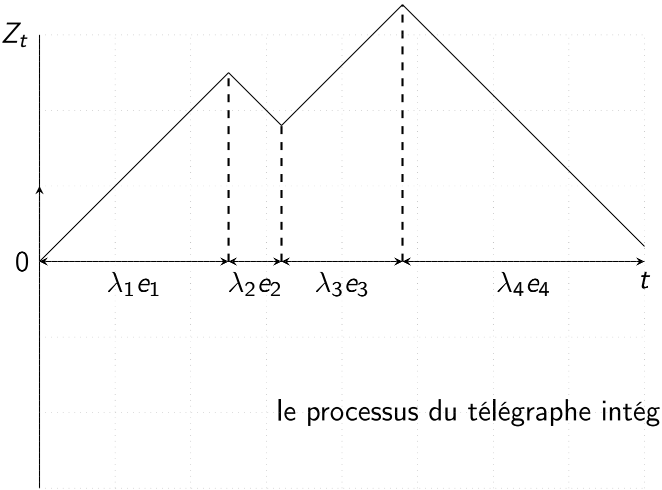
La marche aléatoire interpolée $(\tilde{Z}_t^{\Delta},\ t \geq 0)$ converge en loi $(\Delta_x = \Delta_T)$ vers le processus du télégraphe intégré (ITN) $(Z_t^{c_0,c_1},\ t \geq 0)$.

Description de l'ITN: $(e_n, n \geq 1)$ une suite d'exponentielle $\mathcal{E}(1)$ i.i.d.

$$N_t^{c_0,c_1} = \sum_{k\geq 1} 1_{\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k \leq t\}}, \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \begin{cases} 1/c_0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1/c_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit $Z_t^{c_0,c_1} = \int_0^t (-1)^{N_u^{c_0,c_1}} du.$

Dans le cas symétrique (i.e. $c_0 = c_1$), on note $N_t^{c_0}$ (resp. $Z_t^{c_0}$)



le processus du télégraphe intégré

Idée de preuve: On note $T_1 = \inf\{t \geq 1 : \; Y_t \neq Y_0\}$ et

$$T_{k+1} = \inf\{t > T_k \; : Y_t \neq Y_{T_k}\}; \quad k \geq 1.$$

Alors les variables aléatoires $A_k = T_k - T_{k-1}$ sont indépendantes et $\Delta_T A_{2k}$ (resp. $\Delta_T A_{2k+1}$) converge en loi vers $\mathcal{E}(1/c_0)$ (resp. $\mathcal{E}(1/c_1)$).

Remarques

- le processus du télégraphe intégré n'est pas un processus markovien. Il possède une mémoire instantanée. $(Z_t, D_- Z_t)$ et (Z_t, N_t) sont markoviens.
- le ITN est l'un des processus déterministes par morceaux les plus simples.
- il n'y a que ces deux processus limites possibles: le télégraphe intégré (mémoire instantanée) ou le Brownien avec dérive (sans mémoire).

Description du télégraphe intégré. Propriétés

Rappel: $Z_t^{c_0,c_1} = \int_0^t (-1)^{N_u^{c_0,c_1}} du$ avec le processus de comptage

$$N_t^{c_0,c_1} = \sum_{k\geq 1} 1_{\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k \leq t\}}, \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \begin{cases} 1/c_0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1/c_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition

La loi de $Z_t^{c_0,c_1}$ est donnée par

$$\mathbb{P}(Z_t^{c_0,c_1} \in dx) = e^{-c_1 t}\delta_t(dx) + e^{-\tau t} f(t,x) 1_{[-t,t]}(x),$$

$$f(t,x) = \left[\sqrt{\frac{c_0 c_1 (t+x)}{t-x}} I_1\left(\sqrt{c_0 c_1 (t^2 - x^2)}\right) + c_1 I_0\left(\sqrt{c_0 c_1 (t^2 - x^2)}\right)\right] \frac{e^{\overline{\tau} x}}{2}$$

où $\tau = (c_0 + c_1)/2$, $\overline{\tau} = (c_0 - c_1)/2$ et $I_\nu(\xi) = \sum_{m\geq 0} \frac{(\xi/2)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}$.

Description du générateur: si $F : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée avec $z \mapsto F(z, n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout n alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{E}[F(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})] = \mathbb{E}\Big[\frac{\partial F}{\partial z}(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})(-1)^{N_t^{c_0,c_1}}\Big] \\ + \mathbb{E}\Big[\Big(F(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1}+1) - F(Z_t^{c_0,c_1}, N_t^{c_0,c_1})\Big) \\ \times \Big(c_0 1_{\{N_t^{c_0,c_1} \in 2\mathbb{N}+1\}} + c_1 1_{\{N_t^{c_0,c_1} \in 2\mathbb{N}\}}\Big)\Big].\end{aligned}$$

En appliquant à $F(z, n) = e^{-\mu z} 1_{n \in 2\mathbb{N}}$ puis $F(z, n) = e^{-\mu z} 1_{n \in 2\mathbb{N}+1}$ on obtient la transformée de Laplace

$$\mathbb{E}[e^{-\mu Z_t^{c_0,c_1}}] = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\Big[(-\mu + \tau)\sinh(t\sqrt{\mathcal{E}}) + \sqrt{\mathcal{E}}\cosh(t\sqrt{\mathcal{E}})\Big]e^{-\tau t}$$

avec $\mathcal{E} = \mu^2 - 2\overline{\tau}\mu + \tau^2$. Et finalement

$$F(\mu, s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathbb{E}[e^{-\mu Z_t^{c_0,c_1}}]dt = \frac{s + 2\tau - \mu}{(s+\tau)^2 - \mathcal{E}}$$

Une petite curiosité... dans le cas symétrique

$$\text{Soit} \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{ f(x+at) + f(x-at) \Big\}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

l'unique solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$w(x,t) = \mathbb{E}\left[u\left(x, \int_0^t (-1)^{N_s^c} ds \right) \right]$, solution de l'eq. du télégraphe (TE)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0.$$

- généralisation dans le cas asymétrique: système de deux équations
- le processus du télégraphe converge par changement d'échelle vers un mouvement brownien (cas symétrique).

Mémoire de longueur variable et processus déterministes par morceaux.

La mémoire de longueur finie sur les accroissements de la marche aléatoire n'aboutit qu'à une mémoire instantanée par changement d'échelle et passage à la limite.

➠ Besoin d'un processus à mémoire de longueur variable

On construit une chaîne de Markov (Y_n, M_n) où

- (Y_n) est le processus des accroissements: la marche aléatoire est définie par $X_t = \sum_{n=0}^{t} Y_n$.
- $M_n \in \mathbb{N}^*$ représente la *mémoire* des accroissements.

$$\pi\Big((i,k),(i,k+1)\Big) = 1 - \pi\Big((i,k),(-i,1)\Big) = 1 - \alpha_{i,k}, \quad i = \pm 1, \quad k \geq 1,$$

En fait $M_n = \inf\{1 \leq i \leq n : \; Y_{n-i} \neq Y_n\}$

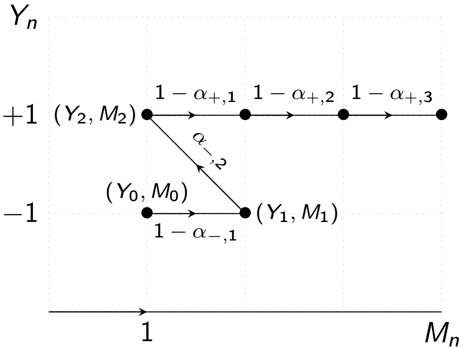
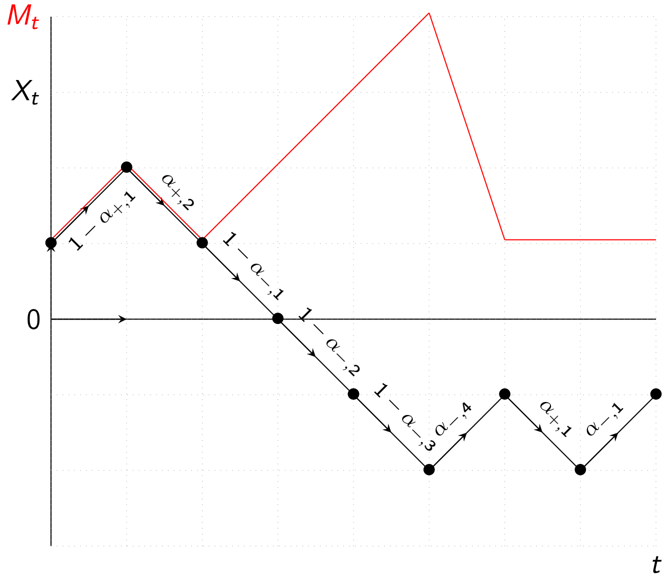


Figure: Description d'une trajectoire de $(Y_n, M_n)_{n\geq 0}$

Une remarque : $\sigma(Y_0, M_0, M_1, \ldots, M_n) = \sigma(M_0, Y_0, \ldots, Y_n)$.


M_t
X_t
0
t
$1-\alpha_{+,1}$
$\alpha_{+,2}$
$1-\alpha_{-,1}$
$1-\alpha_{-,2}$
$1-\alpha_{-,3}$
$\alpha_{-,4}$
$\alpha_{+,1}$
$\alpha_{-,1}$

Le comportement en temps long de la chaîne de Markov permet de décrire l'asymptotique de la marche aléatoire.
Sous l'hypothèse

$$\Theta_\pm := \sum_{n\geq 1} \prod_{k=1}^{n-1} (1-\alpha_{\pm,k}) = \sum_{n\geq 1} \mathcal{P}_\pm(n) < \infty$$

la chaîne de Markov $(Y_t, M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ admet une proba invariante. Ainsi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X_t)}{t} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

De plus, si $\sum_{n\geq 1} n\mathcal{P}_\pm(n) < \infty$ avec alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \mathbb{E}(X_t) - t\,\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} \right\} = C.$$

Loi de X_t pour tout $t \in \mathbb{N}$ avec $(Y_0, M_0) = (1,1)$ (formule compliquée).

Théorème

En choisissant une variable géométrique τ indépendante de (X_t) avec

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \mu^k(1-\mu), \quad k \geq 0.$$

on obtient l'expression de la fonction génératrice double $\mathbb{E}[\lambda^{S_\tau}]$:

$$\frac{(\mu-1)\left\{\lambda\mu\left(\widehat{\mathcal{P}}_-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+\widehat{\mathcal{P}}_+(\lambda\mu)\right)+(\lambda\mu-1)\widehat{\mathcal{P}}_-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\widehat{\mathcal{P}}_+(\lambda\mu)\right\}}{\mu(\lambda\mu-1)\widehat{\mathcal{P}}_+(\lambda\mu)+\lambda\mu(\mu-\lambda)\widehat{\mathcal{P}}_-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+(\lambda\mu-1)(\mu-\lambda)\widehat{\mathcal{P}}_-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\widehat{\mathcal{P}}_+(\lambda\mu)}$$

où $\widehat{\mathcal{P}}_\pm$ est défini pour $0 < x < 1$ par $\widehat{\mathcal{P}}_\pm(x) = \sum_{k\geq 1}\mathcal{P}_\pm(k)x^k$.

la génératrice dble n'est plus forcément une fraction rationnelle

- si $\alpha_{-,k} = \alpha$ alors $\widehat{\mathcal{P}}_-(x) = \sum_{k\geq 1}(1-\alpha)^{k-1}x^k = \frac{x}{1-(1-\alpha)x}$.
- si $\alpha_{-,k} = 1-\alpha/k$, then $\widehat{\mathcal{P}}_-(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{\alpha^{k-1}x^k}{(k-1)!} = xe^{\alpha x}$.

Changement d'échelle et processus limite

Soit $\Delta_x > 0$. On suppose

$$\alpha_{i,k} = f_i(k\Delta_x)\Delta_x + \tilde{\alpha}_{i,k,\varepsilon}\Delta_x, \quad k \geq 1,\ i = \pm$$

où f_- et f_+ sont des fonctions positives qui satisfont $\int_0^\infty f_i(u)du = \infty$.
On note $(\widetilde{Z}_t^\Delta)$ l'interpolée linéaire de

$$Z_t^\Delta = \Delta_x X_k, \quad t = k\Delta_t,$$

avec $\Delta := \Delta_t = \Delta_x$. On définit le processus de comptage:

$$N_t^\Delta = \sup\{n \geq 0 :\ \Delta T_n \leq t\} = \sum_{n\geq 1} 1_{\{\Delta T_n \leq t\}},$$

où T_n est la suite des temps de changements d'états des accroissements (Y_n).

Théorème

Soit $Y_0 = M_0 = 1$, une suite $(e_n,\ n \geq 1)$ de v.a. indépendantes telle que

$$\mathbb{P}(e_{2n-1} > t) = \exp - \int_0^t f_+(u)du, \quad \mathbb{P}(e_{2n} > t) = \exp - \int_0^t f_-(u)du.$$

On définit le processus de comptage $N_t^0 = \sum_{n\geq 1} 1_{\{e_1+\ldots+e_n\leq t\}}$, alors $(N_t^\Delta,\ t \geq 0)$ converge en loi vers $(N_t^0,\ t \geq 0)$ quand $\Delta \to 0$.

Idée de preuve:

$$\mathbb{P}(\Delta(T_{2k+1} - T_{2k}) > t) = (1 - \alpha_{+,1}) \times \ldots \times (1 - \alpha_{+,\lfloor t/\Delta \rfloor}).$$

On pose $\delta_\Delta(t) := \log\left\{\mathbb{P}(\Delta(T_{2k+1} - T_{2k}) > t)\right\} = \sum_{j=1}^{\lfloor t/\Delta\rfloor} \log(1 - \alpha_{+,j})$.
Comme f_+ est une fonction continue,

$$\lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} -\Delta \sum_{j=1}^{\lfloor t/\Delta\rfloor} f_+(j\Delta) = -\int_0^t f_+(u)du. \qquad \square$$

Corollaire

Soit $m_t = t - \sup\{e_1 + \ldots + e_k : \; e_1 + \ldots + e_k \leq t\}$.
Condition initiale $X_0^\Delta = 1$. On définit le processus mémoire renormalisé

$$M_t^\Delta = \Delta M_k, \; Y_t^\Delta = Y_k \quad \text{pour } k = \left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor.$$

Alors la convergence en loi suivante est vérifiée:

$$\left(\widetilde{Z}_t^\Delta, Y_t^\Delta, M_t^\Delta\right) \underset{\Delta \to 0}{\longrightarrow} \left(Z_t^0 = \int_0^t (-1)^{N_s^0} ds, (-1)^{N_t^0}, m_t\right),$$

De plus, $\left(Z_t^0, (-1)^{N_t^0}, m_t, t \geq 0\right)$ et $\left((-1)^{N_t^0}, m_t, t \geq 0\right)$ sont des processus markoviens.

Lois des sauts de la dérivée

1. Si f_- est une fonction constante alors (e_{2n}) est une suite d'exponentielle (loi sans mémoire).
2. Si $f_-(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}$ avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ alors e_{2n} est une suite de v.a. de Weibull de paramètres (α, λ).
3. Si $f_-(x) = \frac{\lambda}{x} 1_{\{x \geq x_0\}}$ avec $x_0 > 0$, alors e_{2n} suit une loi de Pareto.

Double transformée de Laplace

Il est possible de calculer $\mathcal{L}(r, \gamma) := \int_0^\infty e^{-rt}\, \mathbb{E}\left[e^{-\gamma Z_t^0}\right] dt$, $r > 0$, $\gamma > 0$, qui est égal à

$$\frac{-(r+\gamma)\mathcal{R}_-(r-\gamma)\mathcal{R}_+(r+\gamma) + \mathcal{R}_-(r-\gamma) + \mathcal{R}_+(r+\gamma)}{(r-\gamma)\mathcal{R}_-(r-\gamma) + (r+\gamma)\mathcal{R}_+(r+\gamma) - (r^2-\gamma^2)\mathcal{R}_-(r-\gamma)\mathcal{R}_+(r+\gamma)},$$

avec

$$\mathcal{R}_\pm(z) = \int_0^\infty e^{-zt - \int_0^t f_\pm(u)\,du}\, dt, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Remarque: un lien entre le processus des accroissements (Y_n) (temps discret) et le double peigne (VLMC) décrivant les mots de longueur infinie dans un alphabet à deux lettres $\{0, 1\}$. Exemple: $\ldots 1000111010$

Quelques questions ouvertes:

- loi du processus Z_t^0 à t fixé: fait intervenir des sommes de lois de Weibull ou sommes de lois de Pareto ou...
- description du générateur et utilisation pour établir des ponts entre différentes EDP