



**Vitesse de convergence à l'équilibre  
de PDMP ergodiques par méthode de couplage.  
Étude de quelques exemples**

*Hélène Guérin, Université de Rennes 1*

COLLOQUE PIECE, 18-21 MAI 2015.

# 1. Généralités

Un PDMP est construit à partir de trois ingrédients:

- un champ de vecteur  $F$
- un taux de sauts  $\lambda$
- une mesure de transition  $Q(., dx)$ .

Le **générateur infinitésimal** est donné par

$$\mathcal{L}f(x) = \underbrace{F(x) \cdot \nabla f(x)}_{\text{terme de transport}} + \lambda(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (f(y) - f(x)) Q(x, dy)}_{\text{terme de saut}}.$$

But : Étudier la convergence à l'équilibre de PDMP ergodiques.

Azais, Bardet, Génadot, Krell, Zitt, *Piecewise deterministic Markov process - recent results*, 2014

Malrieu, *Some simple but challenging Markov processes*, 2015

## 2. Distances et instant de couplage

Un couplage de deux mesures de probabilités  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$  est un couple  $(X, \tilde{X})$  de marginales  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$ .

On note  $\Pi(\mu, \tilde{\mu})$  l'ensemble des couplages de marginales  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$ .

**Distance de Wasserstein** d'ordre  $p \geq 1$

$$W_p(\mu, \tilde{\mu}) = \inf \left\{ \mathbb{E} \left[ |X - \tilde{X}|^p \right]^{1/p}, (X, \tilde{X}) \in \Pi(\mu, \tilde{\mu}) \right\}.$$

**Distance en variation totale**

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{VT} = \inf \left\{ \mathbb{P}(X \neq \tilde{X}), (X, \tilde{X}) \in \Pi(\mu, \tilde{\mu}) \right\}.$$

Ici,

- $\mu$  est la loi  $\mu_t^x$  d'une trajectoire issue de  $x$  à l'instant  $t$ ,
- $\tilde{\mu}$  est la loi  $\mu_t^{\tilde{x}}$  d'une trajectoire issue de  $\tilde{x}$  à l'instant  $t$ .

Un **couplage coalescent**  $(X_t, \tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  est un couplage tel qu'il existe un **instant de couplage**  $T_*$  avec  $X_{t+T_*} = \tilde{X}_{t+T_*}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Dans ce cas,

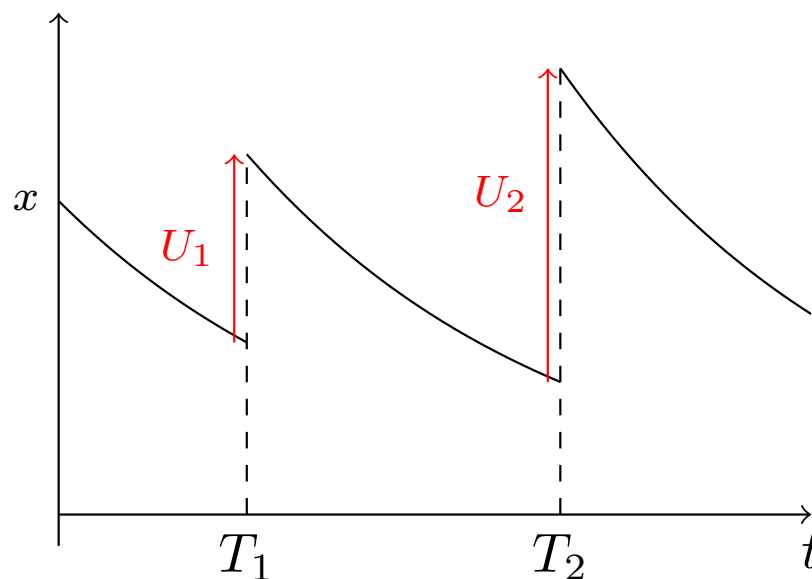
$$\|\mu_t^x - \mu_t^{\tilde{x}}\|_{\text{VT}} \leq \mathbb{P}(T_* > t).$$

### **3. Exemples de PDMP**

## a. Un modèle en pharmacocinétique

(Roberts, Tweedie, 2000; Bardet, Christen, Guillin, Malrieu, Zitt, 2013)

$X_t$  représente la concentration d'un produit chimique dans le sang. La concentration décroît exponentiellement à vitesse  $\theta$  et saute à chaque injection selon un processus de Poisson.



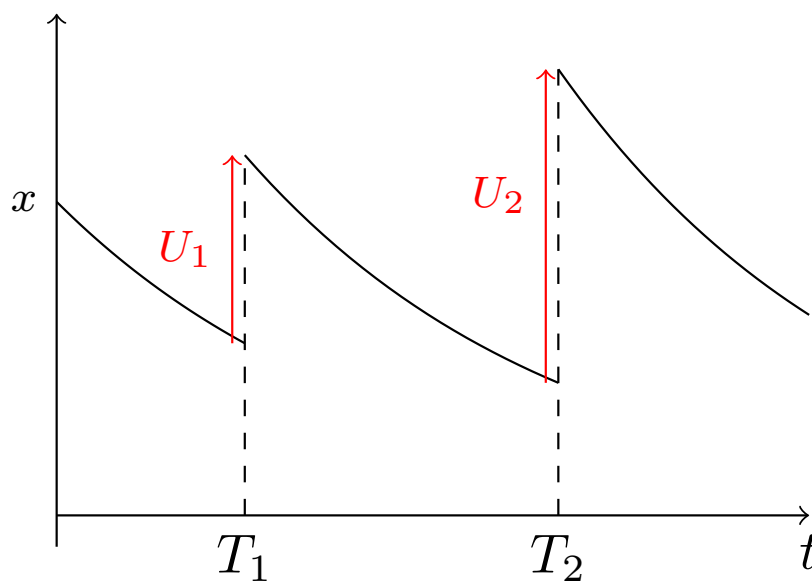
où  $(T_i)_{i \geq 1}$  instants de sauts d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$  et  $(U_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathcal{Exp}(1)$  indépendantes du P.P.P.

Le générateur est

$$\mathcal{L}f(x) = -\theta x f'(x) + \lambda \int_0^\infty [f(x+u) - f(x)] e^{-u} du$$

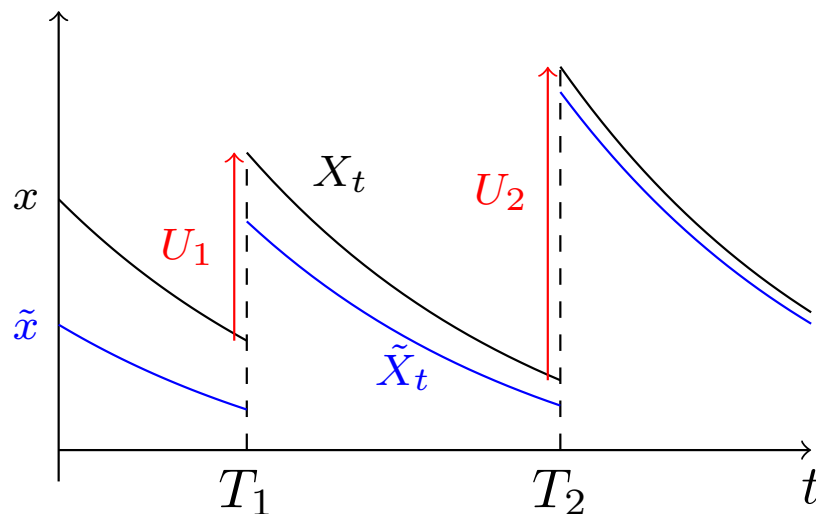
On a

$$X_t = x e^{-\theta t} + \sum_{i \geq 1} U_i e^{-\theta(t-T_i)} \mathbf{1}_{T_i \leq t}.$$



La mesure invariante est la loi Gamma de paramètres  $(\lambda/\theta, 1)$ .

**Couplage** : on utilise les mêmes instants et amplitudes de sauts.



Comme

$$X_t = xe^{-\theta t} + \sum_{i \geq 1} U_i e^{-\theta(t-T_i)} \mathbf{1}_{T_i \leq t},$$

on a  $|X_t - \tilde{X}_t| = |x - \tilde{x}|e^{-\theta t}$  et donc

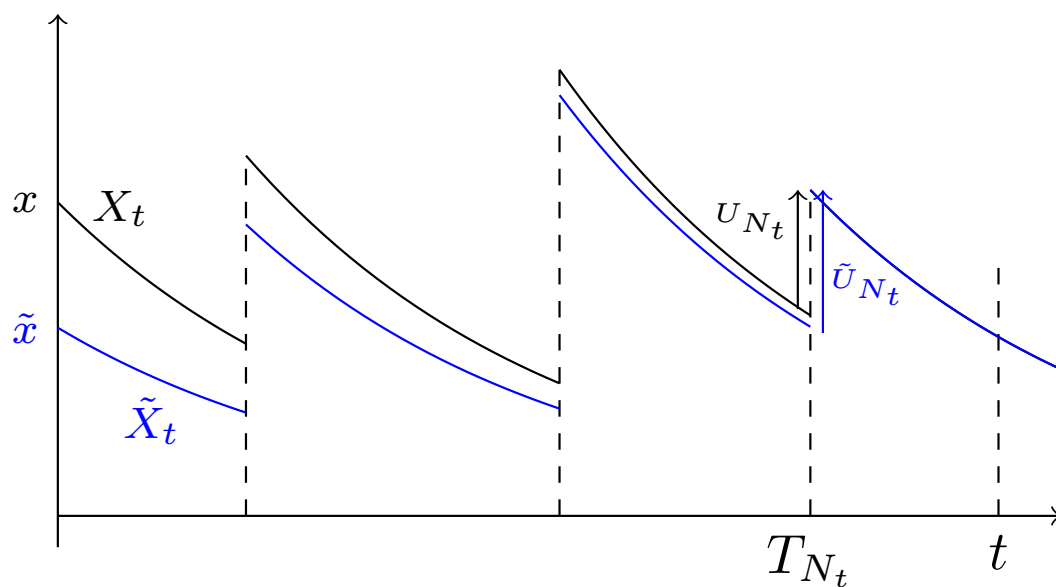
$$W_p(\mu_t^x, \mu_t^{\tilde{x}}) \leq |x - \tilde{x}|e^{-\theta t}.$$



Pour la distance en variation totale, on fixe  $t > 0$  et on note  $N_t$  le nombre de sauts sur  $[0, t]$ .

Sur  $[0, T_{N_t-1}]$ , on utilise le couplage précédent et pour le dernier saut avant  $t$ , on couple la hauteur des sauts afin de maximiser

$$\mathbb{P}\left(X_{T_{N_t}}^- + U_{N_t} = \tilde{X}_{T_{N_t}}^- + \tilde{U}_{N_t}\right)$$



La probabilité conditionnelle maximale est

$$\exp\left(-\left|X_{T_{N_t}}^- - \tilde{X}_{T_{N_t}}^-\right|\right) = \exp\left(-|x - \tilde{x}|e^{-\theta T_{N_t}}\right) \geq 1 - |x - \tilde{x}|e^{-\theta T_{N_t}}.$$

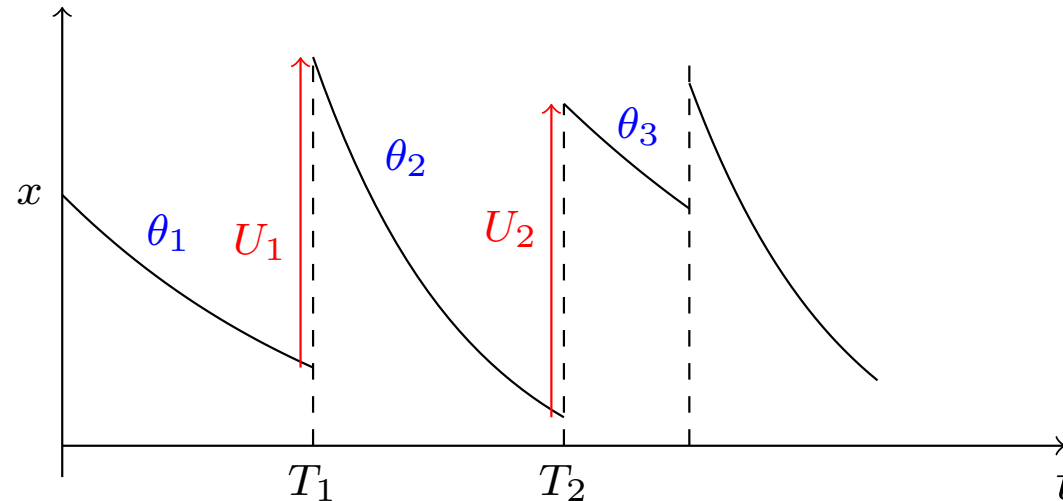
Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\mu_t^x - \mu_t^{\tilde{x}}\|_{VT} &\leq 1 - \mathbb{P}(T_* \leq t) \leq 1 - \mathbb{E}\left[\left(1 - |x - \tilde{x}|e^{-\theta T_{N_t}} \mathbf{1}_{N_t \geq 1}\right)\right] \\ &\leq e^{-\lambda t} + |x - \tilde{x}| \lambda \frac{e^{-\theta t} - e^{-\lambda t}}{\lambda - \theta}. \end{aligned}$$

## b. Un modèle en toxicologie alimentaire

(Bertail, Clémenton, Tressou, 2008; Bouguet, 2015)

$X_t$  représente le taux de toxine dans le corps à l'instant  $t$ . Le taux de saut  $\lambda$  n'est alors plus constant.



**Hypothèses** :  $(\theta_i)$  i.i.d. de loi  $H$ ,  $(U_i)$  i.i.d. de loi  $F$  à densité,  $(S_i)$  i.i.d. de taux  $\lambda$ , avec  $\lambda$  fonction croissante du temps.

On pose  $T_0 = 0$  et  $T_n = \sum_{i=1}^n S_i$

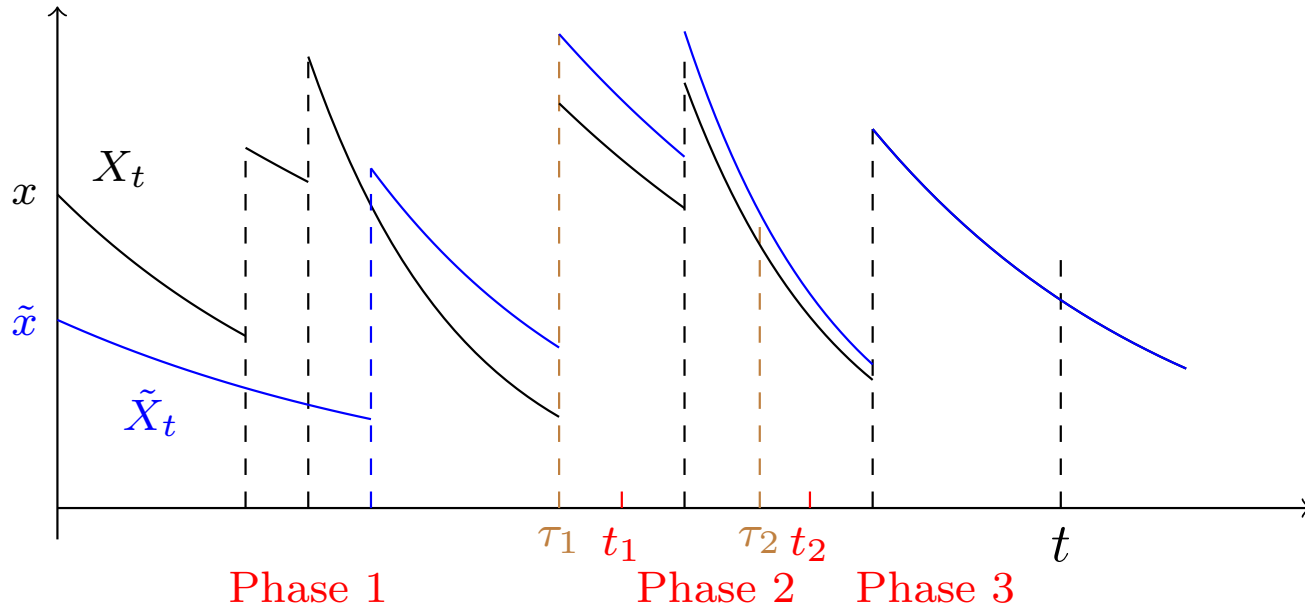
The PDMP est le triplet  $(X_t, \theta_t, A_t)$  où

- $X_t$  est le niveau de toxine,
- $\theta_t = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mathbb{1}_{T_{n-1} \leq t < T_n}$  paramètre métabolique
- $A_t = t - T_{N_t}$  le processus de l'âge.

Le générateur est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x, \theta, a) = & -\theta x \partial_x f(x, \theta, a) + \partial_a f(x, \theta, a) \\ & + \lambda(a) \iint_0^{\infty} [f(x+u, \theta', 0) - f(x, \theta, a)] H(d\theta') F(du) \end{aligned}$$

## Couplage



Alors, pour  $t \geq \tau_1$  on a  $|X_t - \tilde{X}_t| = |X_{\tau_1} - \tilde{X}_{\tau_1}| e^{-\int_{\tau_1}^t \theta_s ds}$ .

$$W_p(\mu_t^{x,\theta,a}, \mu_t^{\tilde{x},\tilde{\theta},\tilde{a}}) \leq C e^{-v(t-t_1)} W_p(X_{t_1}, \tilde{X}_{t_1}),$$

$$\left\| \mu_t^{x,\theta,a} - \mu_t^{\tilde{x},\tilde{\theta},\tilde{a}} \right\|_{VT} \leq 1 - \mathbb{P}(\tau_1 < t_1, \tau_2 < t_2, N[t_2, t] \geq 1).$$

**Phase 1** : obtenir un temps de saut commun aux deux processus.

On considère juste le processus de l'âge.

Le générateur du processus d'âge est

$$\mathcal{A}f(a) = \partial_a f(a) + \lambda(a)[f(0) - f(a)]$$

Si  $a \geq \tilde{a}$ ,  $\lambda(a) \geq \lambda(\tilde{a})$  et on couple l'âge des deux processus selon le générateur

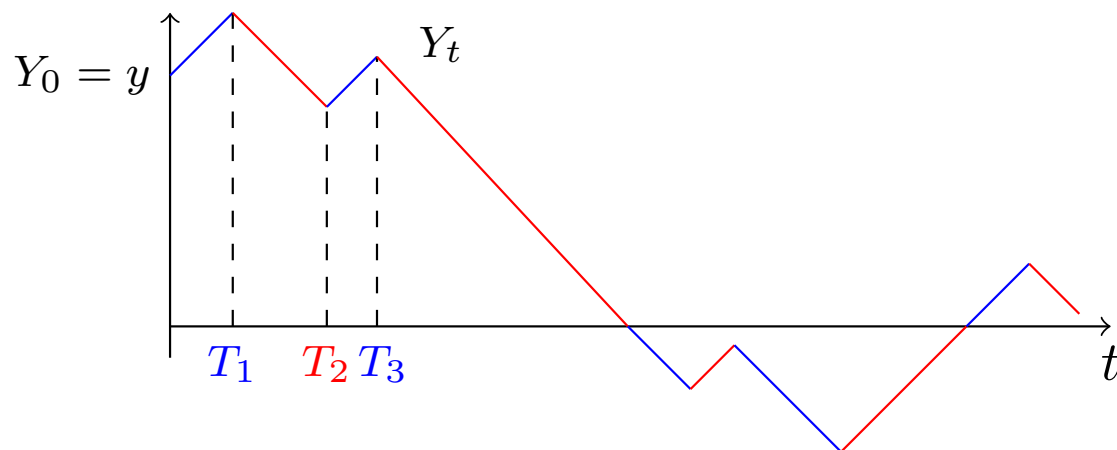
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 f(a, \tilde{a}) &= \partial_a f(a, \tilde{a}) + \partial_{\tilde{a}} f(a, \tilde{a}) \\ &\quad + (\lambda(a) - \lambda(\tilde{a}))[f(0, \tilde{a}) - f(a, \tilde{a})] + \lambda(\tilde{a})[f(0, 0) - f(a, \tilde{a})]. \end{aligned}$$

Remarque : si  $\underline{\lambda} > 0$ , alors  $\tau_1 \leq_{sto} \mathcal{E}xp(\underline{\lambda})$ .

### c. Chemotaxis

(Othmer, Erban, 2004; Fontbona, G., Malrieu, 2012; Fontbona, G., Malrieu, ?)

On considère un modèle simplifié du mouvement d'une bactérie dans son environnement où les nutriments sont localisés en 0.



On suppose que la vitesse  $W_t$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  et saute avec un taux  $a$  quand elle s'approche du nutriment et avec un taux de saut  $b$  quand elle s'en éloigne.

Les taux de saut dépendent de la position.

## Hypothèses

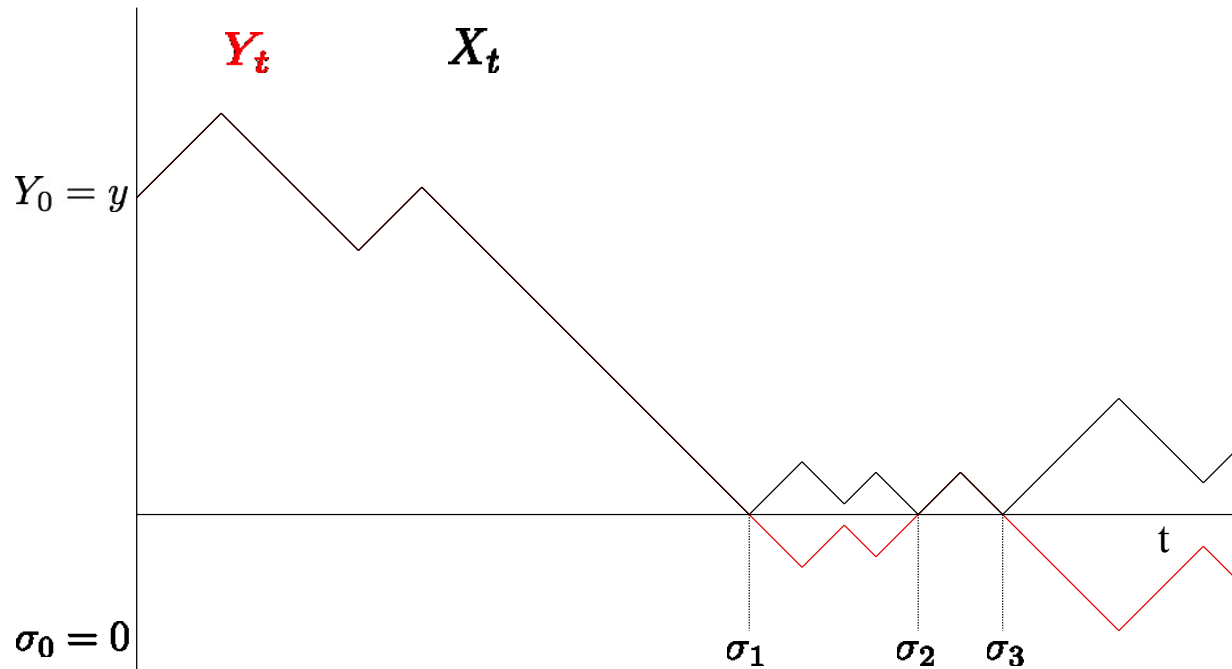
- $a$  est une fonction paire décroissante avec  $0 < \underline{a} \leq a$ ,
- $b$  est une fonction paire croissante avec  $0 < \underline{b} \leq b$ ,
- $0 < a < b$ .

Le PDMP considéré ici est le couple position-vitesse  $(Y_t, W_t)$ .



Le processus réfléchi  $(X_t, V_t)$  avec  $X_t = |Y_t|$  and

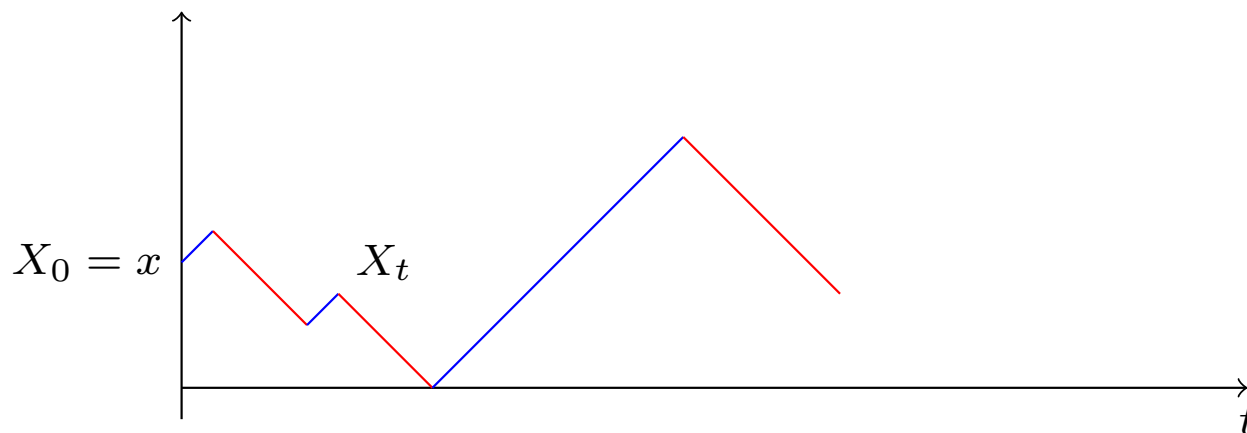
$$\begin{cases} V_0 = \text{sgn}(Y_0)W_0 \\ \{t > 0 : \Delta V_t \neq 0\} = \{t > 0 : \Delta W_t \neq 0\} \cup \{t > 0 : Y_t = 0\}. \end{cases}$$



On remarque que  $(Y_t, W_t) = (-1)^i \text{sgn}(y)(X_t, V_t)$  pour  $t \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

Le générateur infinitésimal est donné par

$$\mathcal{L}f(x, v) = v\partial_x f(x, v) + \left[ b(x)\mathbb{1}_{v=1} + a(x)\mathbb{1}_{v=-1} + \frac{\mathbb{1}_{x=0}}{\mathbb{1}_{x>0}} \right] (f(x, -v) - f(x, v))$$



**Proposition 1** *La mesure de probabilité invariante  $\mu$  de  $(X, V)$  est la mesure produit  $[0, +\infty) \times \{-1, +1\}$  given by*

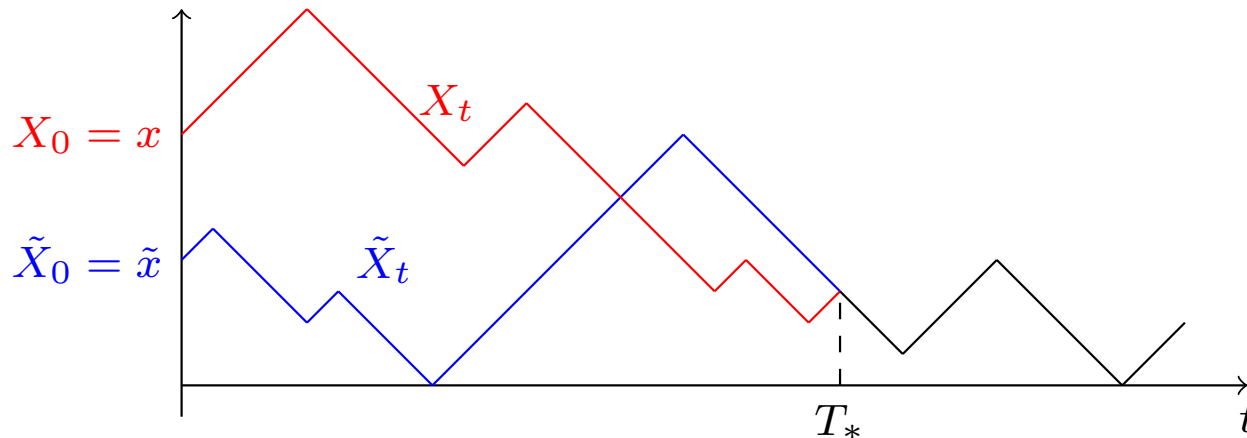
$$\mu(dx, dv) = \frac{1}{C} e^{-F(x)} dx \otimes \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx).$$

*où  $F(x)$  est une primitive de  $b(x) - a(x)$ .*

**Exemple** Si les taux sont constants avec  $0 < a < b$ , alors

$$\mu(dx, dv) = (b - a) e^{-(b-a)x} dx \otimes \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dv).$$

Il faut coupler en même temps la vitesse et la position.



On a

$$\left\| \mu_t^{x,v} - \mu_t^{\tilde{x},\tilde{v}} \right\|_{\text{VT}} \leq \mathbb{P}(T_* > t).$$

Pour tout temps aléatoire  $T$  tel que  $T_* \leq_{\text{sto.}} T$  et  $\lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \mu_t^{x,v} - \mu_t^{\tilde{x},\tilde{v}} \right\|_{\text{VT}} &\leq \mathbb{P}(T_* > t) \\ &\leq \mathbb{P}(T > t) \leq \mathbb{E} [e^{\lambda T}] e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

## Propriétés des instants de saut

Partant du point  $(x, v)$ , le premier instant de saut  $T_{(x,v)}$  de taux  $\lambda$  vérifie

$$T_{(x,v)} = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda(x + vs) ds \geq E \right\}$$

où  $E$  est une exponentielle de paramètre 1 et  $\lambda = b$  si  $v = +1$ ,  $\lambda = a$  si  $v = -1$ .

Supposons  $0 < \tilde{x} < x$ . En prenant la même exponentielle pour chaque instant de saut, on a

$$T_{(\tilde{x},+1)} \geq T_{(x,+1)} \quad \text{et} \quad T_{(\tilde{x},-1)} \leq T_{(x,-1)}.$$

Par ailleurs,  $T_{(x,+1)} \stackrel{sto.}{\leq} E(b(x))$  et  $T_{(x,-1)} \stackrel{sto.}{\leq} E(\underline{a}) \wedge x$ .

Par conséquent, on a un contrôle des transformées de Laplace des instants de saut.

## Proposition

Soit  $0 \leq \tilde{x} \leq x$ . Il existe une v.a.  $Z_+$  indépendante de  $T_{(\tilde{x},+1)}$  telle que

$$T_{(x,+1)} \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} T_{(\tilde{x},+1)} \wedge Z_+.$$

## Exemple

Si  $b(x) = b + x$  avec  $b > 0$  alors la transformée de Laplace de  $T_{(x,+1)}$  est

$$\mathbb{E}[e^{\lambda T_{(x,+1)}}] = 1 + \lambda \eta(x + b - \lambda)$$

avec  $\eta(u) = e^{\frac{u^2}{2}} \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(u))$  and  $\Phi$  la fonction de répartition d'une gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Pour  $0 \leq \tilde{x} \leq x$ ,

$$T_{(x,+1)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} T_{(\tilde{x},+1)} \wedge E(x - \tilde{x}),$$

où  $E(x - \tilde{x})$  exponentielle de moyenne  $\frac{1}{x - \tilde{x}}$  indépendante de  $T_{(\tilde{x},+1)}$ .

Par ailleurs, il existe un couplage  $(T_{(x,+1)}, T_{(\tilde{x},+1)})$  tel que

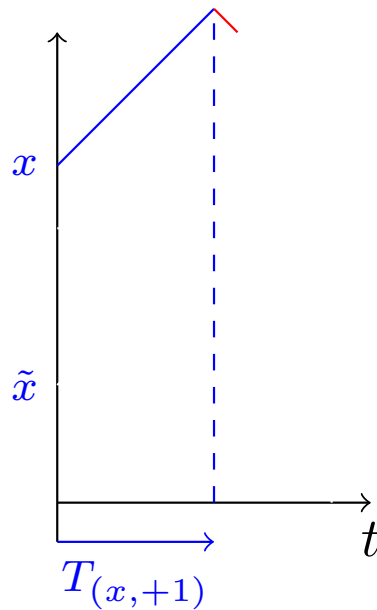
$$T_{(\tilde{x},+1)} \geq T_{(x,+1)} \quad \text{p.s.}$$

et conditionnellement à  $\{T_{(x,+1)} = t\}$ ,  $T_{(\tilde{x},+1)} = t + \xi_t T'_{(\tilde{x}+t,+1)}$   
avec  $\xi_t$  v.a. de Bernoulli indépendante de  $T'_{(x+t,+1)}$  de paramètre

$$p_t := \frac{b(x+t) - b(\tilde{x}+t)}{b(x+t)}.$$

Par ailleurs, il existe un couplage  $(T_{(x,+1)}, T_{(\tilde{x},+1)})$  tel que

$$T_{(\tilde{x},+1)} \geq T_{(x,+1)} \quad \text{p.s.}$$



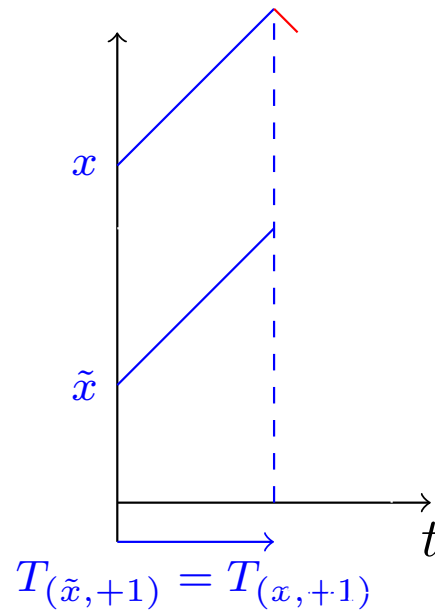
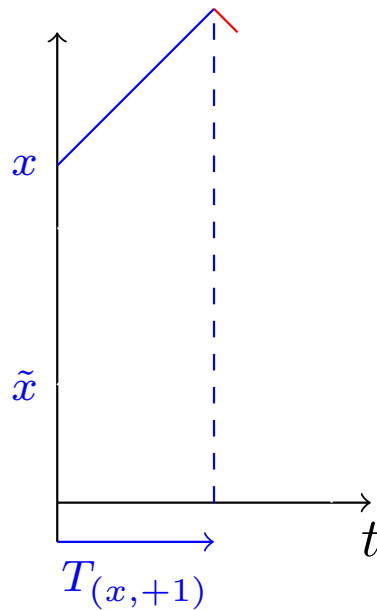
et conditionnellement à  $\{T_{(x,+1)} = t\}$ ,  $T_{(\tilde{x},+1)} = t + \xi_t T'_{(\tilde{x}+t,+1)}$   
 avec  $\xi_t$  v.a. de Bernoulli indépendante de  $T'_{(x+t,+1)}$  de paramètre

$$p_t := \frac{b(x+t) - b(\tilde{x}+t)}{b(x+t)}.$$



Par ailleurs, il existe un couplage  $(T_{(x,+1)}, T_{(\tilde{x},+1)})$  tel que

$$T_{(\tilde{x},+1)} \geq T_{(x,+1)} \quad \text{p.s.}$$

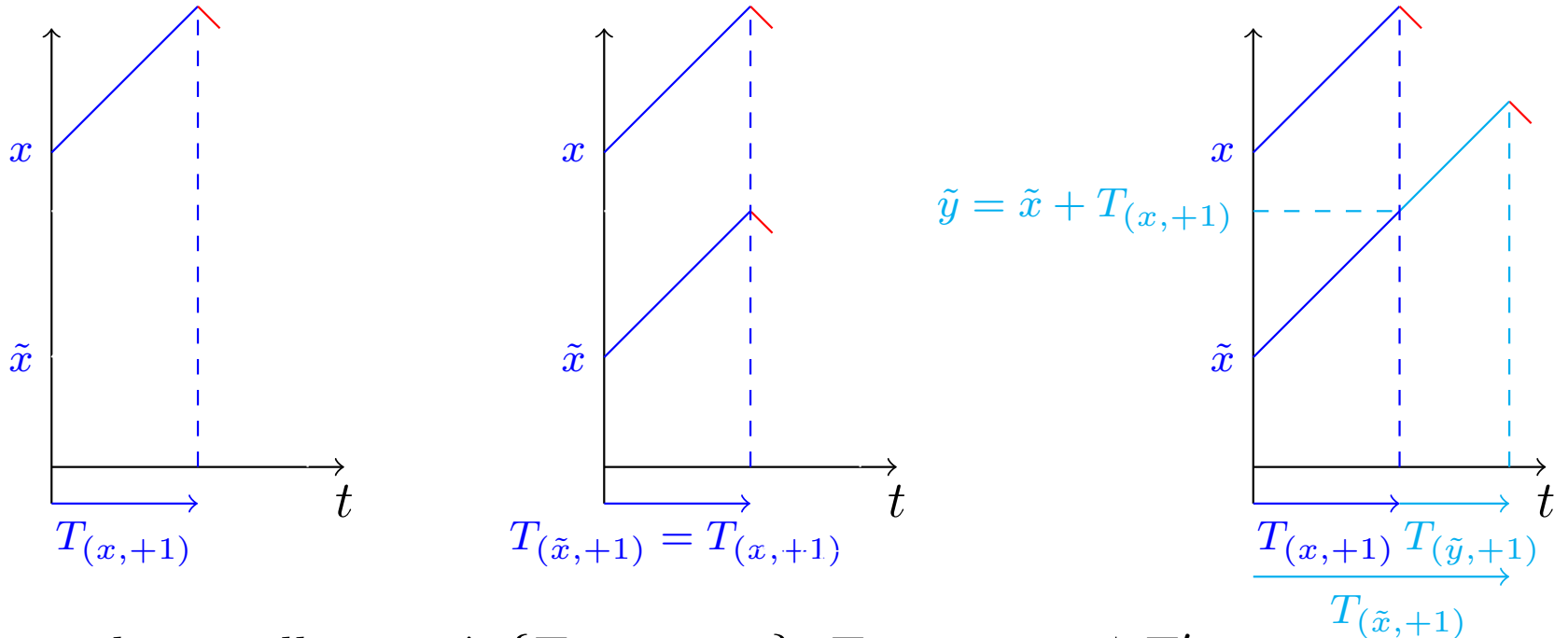


et conditionnellement à  $\{T_{(x,+1)} = t\}$ ,  $T_{(\tilde{x},+1)} = t + \xi_t T'_{(\tilde{x}+t,+1)}$   
 avec  $\xi_t$  v.a. de Bernoulli indépendante de  $T'_{(\tilde{x}+t,+1)}$  de paramètre

$$p_t := \frac{b(x+t) - b(\tilde{x}+t)}{b(x+t)}.$$

Par ailleurs, il existe un couplage  $(T_{(x,+1)}, T_{(\tilde{x},+1)})$  tel que

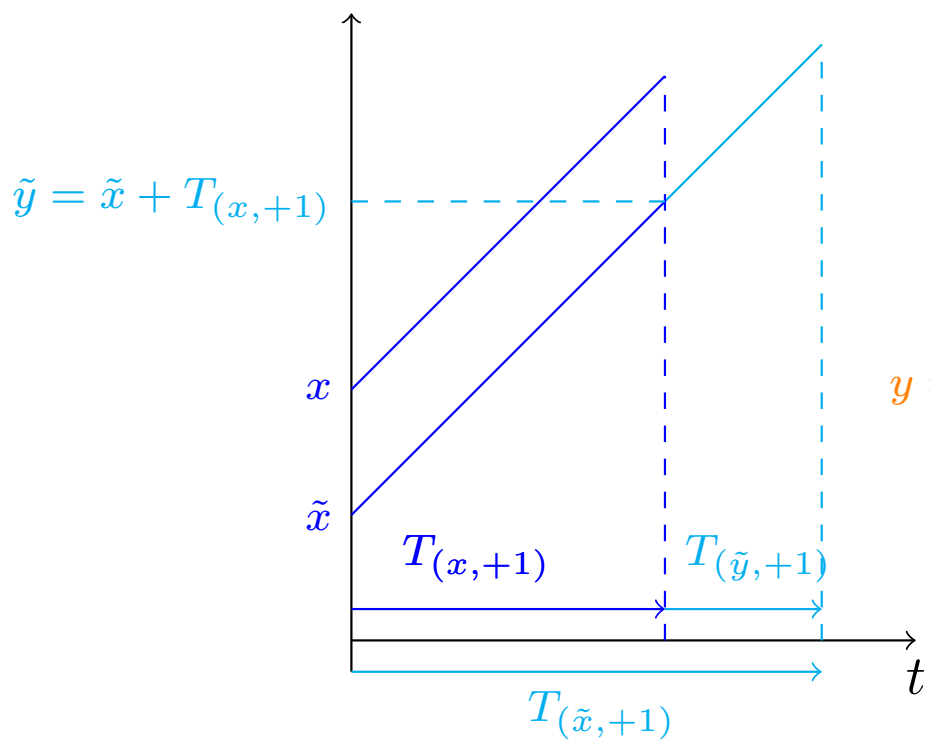
$$T_{(\tilde{x},+1)} \geq T_{(x,+1)} \quad \text{p.s.}$$



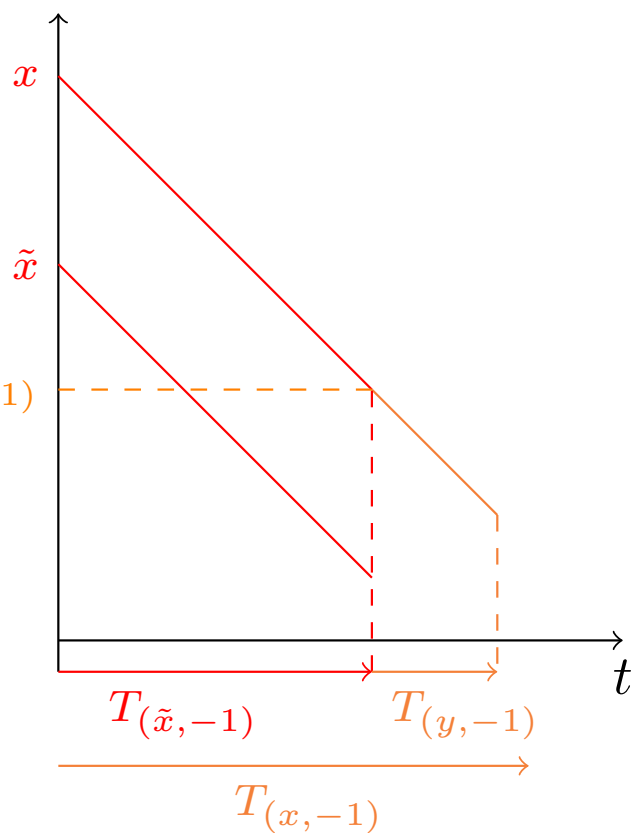
et conditionnellement à  $\{T_{(x,+1)} = t\}$ ,  $T_{(\tilde{x},+1)} = t + \xi_t T'_{(\tilde{x}+t,+1)}$   
 avec  $\xi_t$  v.a. de Bernoulli indépendante de  $T'_{(x+t,+1)}$  de paramètre

$$p_t := \frac{b(x+t) - b(\tilde{x}+t)}{b(x+t)}.$$

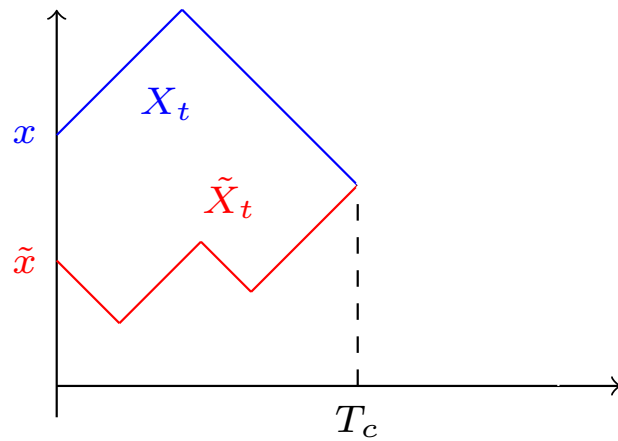
On a un résultat similaire pour  $T_{(x,-1)}$ .



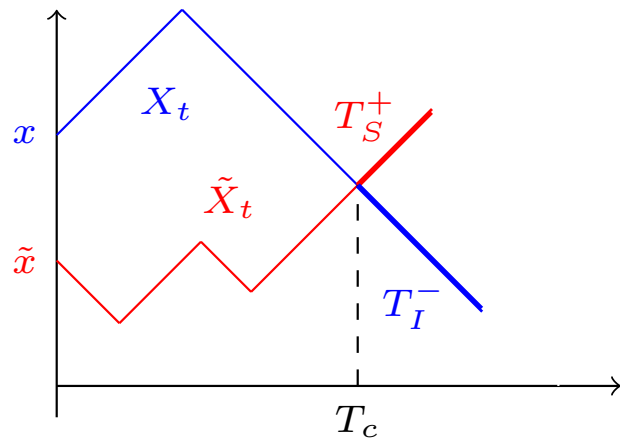
$$y = x - T_{(\tilde{x},-1)}$$



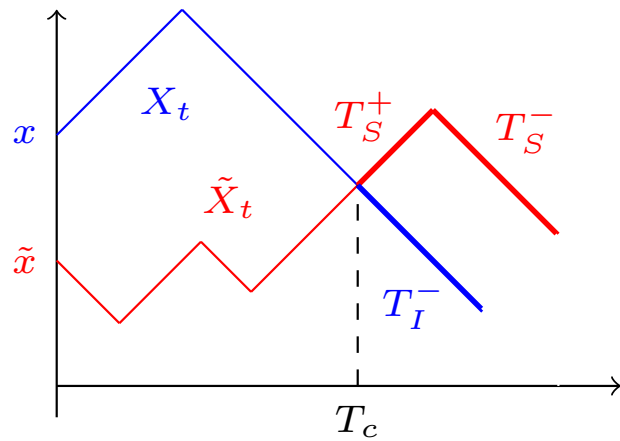
# Un couplage des trajectoires



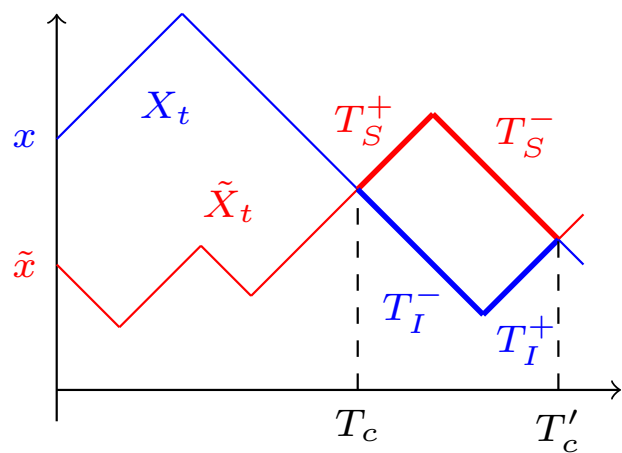
# Un couplage des trajectoires



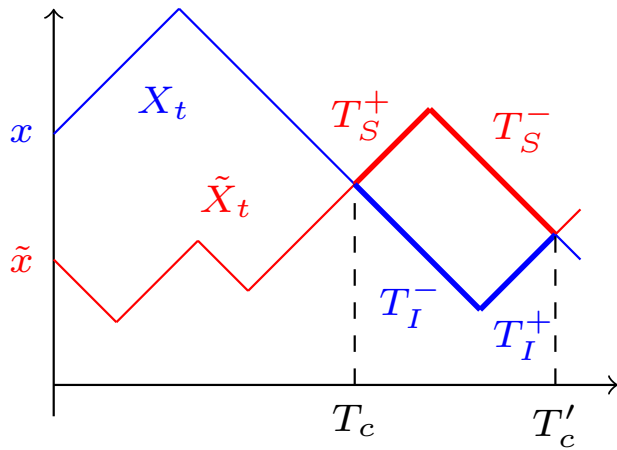
# Un couplage des trajectoires



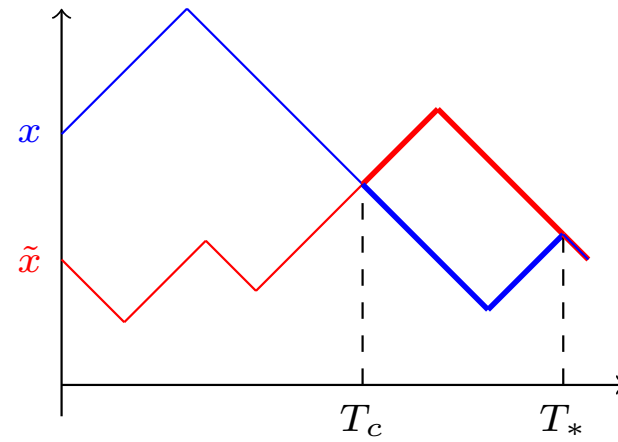
# Un couplage des trajectoires



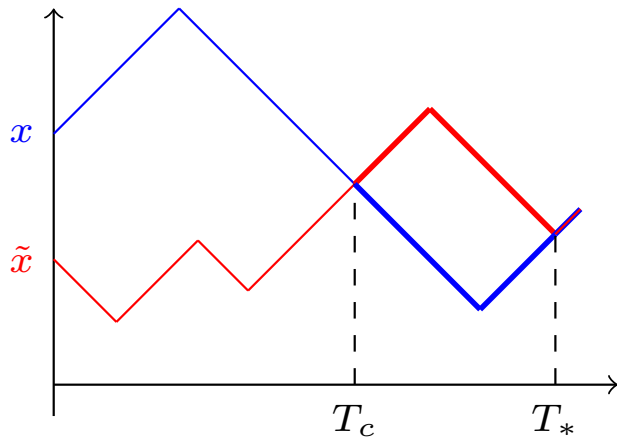
# Un couplage des trajectoires



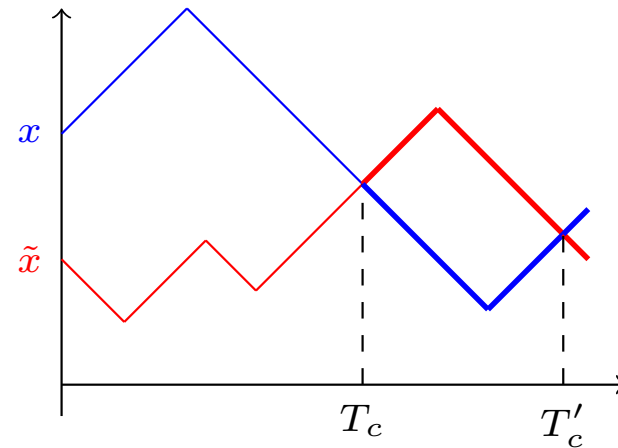
$$T_S^+ = T_I^+ \text{ et } T_S^- = T_I^-$$



$$T_S^+ = T_I^+ \text{ et } T_S^- > T_I^-$$



$$T_S^+ < T_I^+ \text{ et } T_S^- = T_I^-$$



$$T_S^+ < T_I^+ \text{ et } T_S^- > T_I^-$$



Rappelons que, pour tout  $T \geq T_*$ ,

$$\left\| \mu_t^{x,v} - \mu_t^{\tilde{x},\tilde{v}} \right\|_{\text{TV}} \leq \mathbb{P}(T_* > t) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}[e^{\lambda T}].$$

Le temps de couplage de deux trajectoires partant respectivement de  $(x, v)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{v})$  avec  $x > \tilde{x}$  est

$$T_* = T_c + \text{the spent time to stick both paths,}$$

où  $T_c$  est le premier instant de croisement.

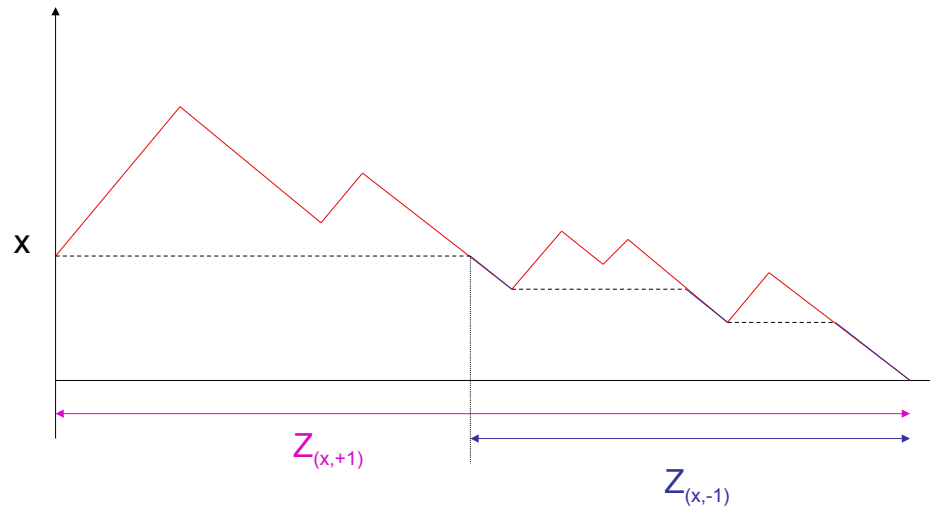
On remarque que  $T_c$  est inférieur au premier temps d'atteinte de zéro de la trajectoire supérieure.

## Cas où $a$ et $b$ sont constants, $a < b$ .

Les instants inter-sauts sont alors juste des v.a. exponentielles.

### a) Le premier temps d'atteinte de zéro

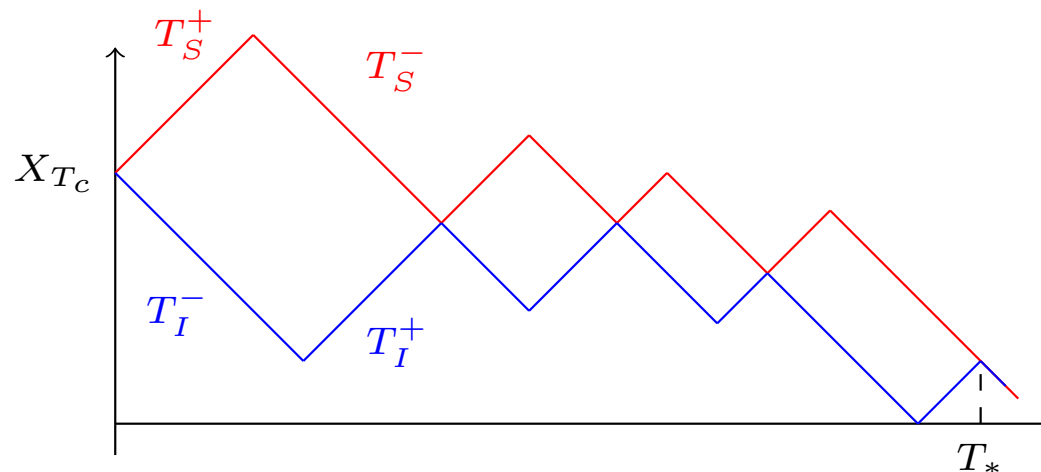
Partant de  $(X_0, V_0) = (x, v)$ , le premier temps d'atteinte  $Z_{(x,v)}$  de zéro vérifie



$$Z_{x,+1} = S + Z_{x,-1} = S + x + \sum_{i=0}^N S^i \quad \text{with} \quad N \sim \text{Pois}(ax).$$

b) Estimation du temps de couplage après le premier temps de croisement  $T_c$ ,

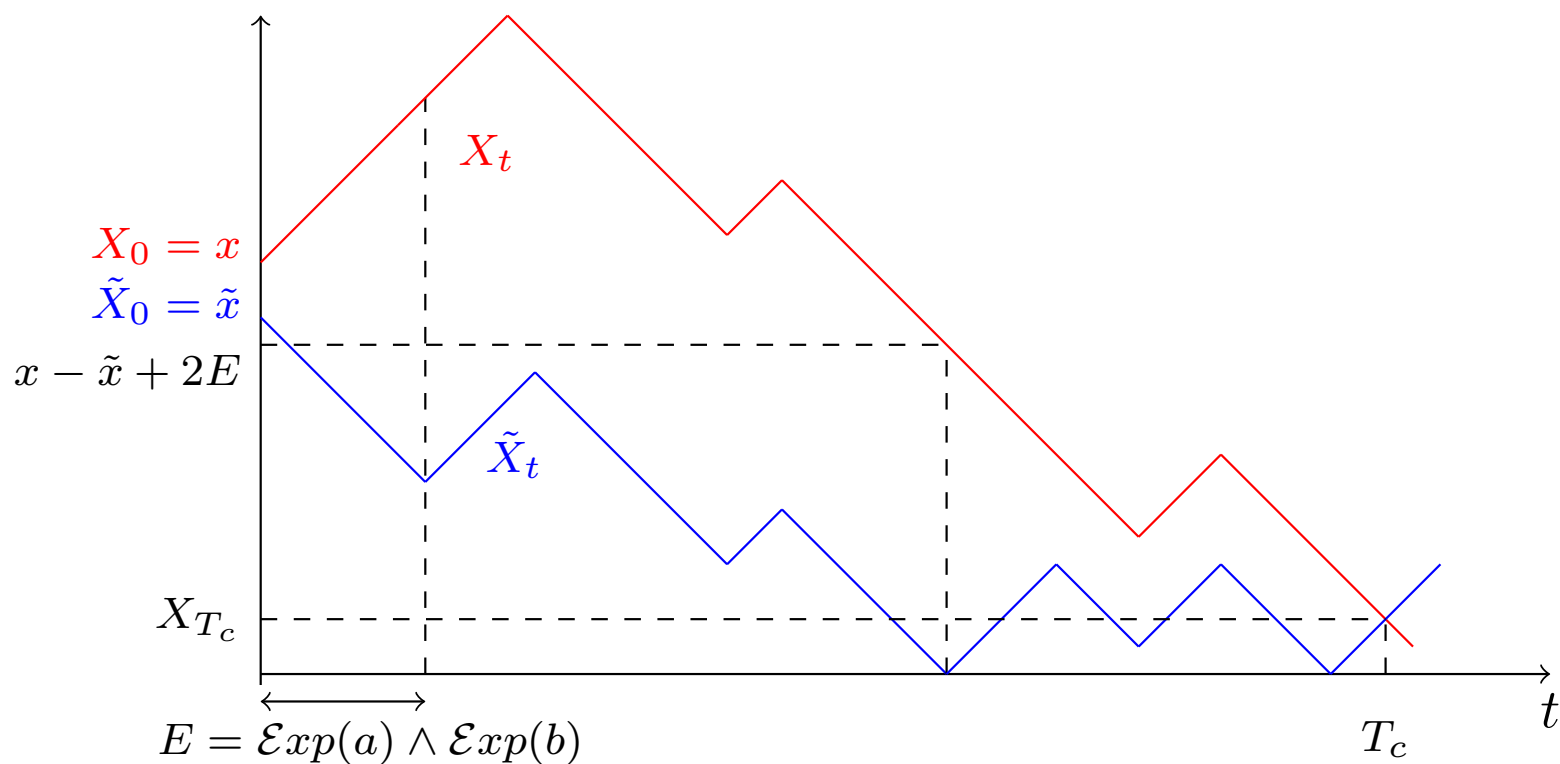
$$T_S^+ = T_I^+ = \mathcal{E}xp(b), \quad T_S^- = \mathcal{E}xp(a) \wedge (x + T_S^+), \quad T_I^- = \mathcal{E}xp(a) \wedge x$$



Le temps de couplage est plus petite que le temps d'atteinte de zéro de la trajectoire supérieure issue de  $X_{T_c}$ .

c) Position du premier point de croisement  $X_{T_c}$ :

$$X_{T_c} \leq \frac{x - \tilde{x}}{2} + E \quad \text{with} \quad E \sim \text{Exp}(a + b).$$



## d) Conclusion

Quand  $a < b$  sont constants, on obtient

$$\|\mu_t^{x,v} - \mu_t^{\tilde{x},\tilde{v}}\|_{\text{TV}} \leq \frac{(a+b)b}{2a^2} e^{r(a,b)(x \vee \tilde{x})} e^{-\lambda_c t},$$

avec  $r(a,b) = \frac{3(b-a)}{4} \vee (b - \sqrt{ab})$  et  $\lambda_c = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2}$ .